

Gerd Buchwald
Diss. Frankfurt am Main
1904

Untersuchung von Stabilitätsproblemen bei Fusion durch
schwerioneninduzierten Trägheitseinschluß

Inaugural - Dissertation

zur

Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Physik der

Johann-Wolfgang-Goethe - Universität

zu Frankfurt am Main

von

Gerd Buchwald

aus Offenbach am Main

Frankfurt am Main

1984

*Gedruckt mit Genehmigung des Fachbereiches Physik
der Johann-Wolfgang-Goethe - Universität
zu Frankfurt am Main*

Dekan: Prof. Dr. F. Granzer

Leiter der Arbeit: Prof. Dr. W. Greiner

Erstgutachter: Prof. Dr. W. Greiner

Zweitgutachter: Prof. Dr. J.A. Maruhn

Tag der mündlichen Prüfung: 1.10.84

INHALTSVERZEICHNIS

I. Einleitung	5
II. Erhaltung der sphärischen Symmetrie	13
II.1 Modell und Vorgehensweise	14
II.2 Ergebnisse in Zylindergeometrie	16
II.3 Quantifizierung der Bestrahlungsasymmetrie	24
II.3.1 Modell in Zylindergeometrie	24
II.3.2 Das Modell für sphärische Geometrie	28
II.3.3 Vergleich	33
II.4 Zwischenbetrachtung	33
III. Rayleigh-Taylor Instabilitäten	35
III.1 Ein einfaches analytisches Modell	37
III.2 Numerische RTI-Studien	43
III.2.1 Überblick über existierende Rechnungen	43
III.2.2 Bewegungsgleichungen	48
III.2.3 Ergebnisse der RTI-Studien	50
III.2.3.1 Vergleich mit anderen Arbeiten	50
III.2.3.2 Studien an gestörten Folien	56
III.2.3.2.1 Zeitliche Entwicklung	57
III.2.3.2.2 Kritische Schichtdicken	65
III.2.3.2.3 Abhängigkeit von der Atwood-Zahl	70
III.2.3.3 Beeinflussung der Wachstumsraten	75
III.2.3.3.1 Ausschmieren der Trennschicht	75
III.2.3.3.2 Einfluß von Viskosität	87
IV. Zusammenfassung und Ausblick	95

Anhang	99
1) Das Iterationsverfahren	99
2) Berücksichtigung von Viskosität	110
Referenzen	117

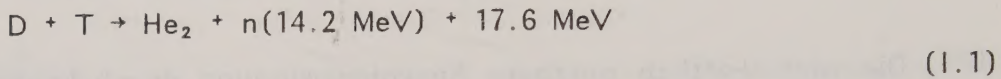
I. EINLEITUNG

Die wirtschaftlich nutzbare Energiegewinnung durch kontrollierte Fusion von Wasserstoff zu Helium rückt immer mehr in den Blickpunkt der Energieplanung. Obwohl mit einigen Problemen verbunden (s.u.), brächte diese Technologie erhebliche Vorteile gegenüber z.B. herkömmlichen Spaltkraftwerken.

Einerseits wäre bei Fusionskraftwerken der Sicherheitsaspekt wesentlich günstiger: Es würden fast keine schweren, stark radioaktiven Abfälle auftreten, was das Entsorgungsproblem erheblich erleichtert, und der größte anzunehmende Unfall (GAU) ist beim Fusionskraftwerk vergleichsweise harmlos: Während beim Spaltkraftwerk zumindest theoretisch die Gefahr einer unkontrollierten Kettenreaktion mit allen Folgen besteht, würde das Fusionskraftwerk aufgrund des dauernd benötigten komplizierten Zündmechanismus (s.u.) bei einer Störung einfach ausfallen.

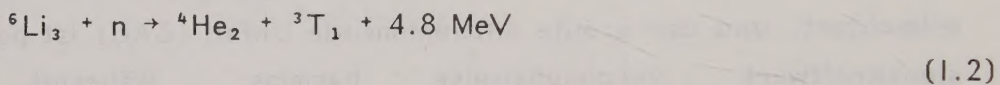
Andererseits brächte ein Fusionskraftwerk erhebliche wirtschaftliche Vorteile mit sich: Als Brennstoff dient im wesentlichen Wasserstoff, der sowohl in der Atmosphäre als auch in Gewässern praktisch unbegrenzt zur Verfügung steht. Man wäre somit unabhängig von Brennstofflieferungen anderer Staaten wie dies bei Uran oder Erdöl der Fall ist. Dadurch ließe sich der Brennstoffpreis auf die reinen Gewinnungskosten reduzieren. Auch das zur Kühlung und zum Brüten von Tritium (s.u.) benötigte Lithium ließe sich leichter gewinnen [Bad 81], als zum Beispiel ^{235}U für ein Spaltkraftwerk.

Zur Fusion kommen mehrere Wasserstoffisotope in Frage. Als günstigste Reaktion hat sich



herausgestellt [Bad 81]. Ein Gramm DT-Gemisch würde dabei 300 000 MJ liefern.

Das Deuterium könnte z.B. aus Seewasser gewonnen werden, wo das DHO/H₂O-Verhältnis bei 1/6600 und das D₂O/H₂O-Verhältnis bei 1/50 Mio. liegt. Das Tritium müßte mit



erbrütet werden. Durch das Auftreten des hochgiftigen Tritiums ergäbe sich eine Gefahr beim Betrieb von Fusionskraftwerken, die jedoch beherrscht werden kann.

Das Hauptproblem der gesamten Fusionstechnologie liegt bei der thermonuklearen Zündung des DT-Gemisches. Man kann die Bedingung für die Zündung einfach abschätzen: D- und T-Kern müssen bei hoher Temperatur dicht zusammen sein. Um ein Gas in einem Volumen V bei einer Temperatur T auf eine Dichte n zu bringen, wird eine Energie von

$$E_{\text{in}} = 2n \cdot 3/2 kT \cdot V \quad (1.3)$$

benötigt. Angenommen, die thermonukleare Reaktion hat eingesetzt und dauert eine Zeit τ . Dann wird die Energie

$$E_{\text{out}} = n^2/4 \langle \sigma V \rangle (17.6 \text{ MeV}) \tau V \quad (1.4)$$

gewonnen. σ ist hierbei der Reaktionswirkungsquerschnitt. Mit der Forderung

$$E_{\text{out}}/E_{\text{in}} > 1 \quad (1.5)$$

ergibt sich aus (1.3) und (1.4) das sogenannte Lawson-Kriterium:

$$n \cdot \tau > 10^{14} \text{ s/cm}^3 \quad (1.6)$$

Die typischen Temperaturen wurde dabei mit $T \approx 20 \text{ keV}$ angenommen. Für $\langle \sigma V \rangle$ wurde $\langle \sigma V \rangle \approx 4 \cdot 10^{-16} \text{ cm}^3/\text{s}$ eingesetzt.

Aus (1.6) erkennt man sofort, daß sich prinzipiell zwei Möglichkeiten ergeben, um die Zündbedingung zu erreichen: Einerseits kann ein DT-Plasma bei vergleichsweise geringer Dichte verhältnismäßig lange eingeschlossen werden. Diesen Weg versucht man beim sog. "magnetischen Einschuß", bei dem das DT-Plasma in einem ringförmigen Magnetfeld eingeschlossen wird (Tokamak). Hier werden typische Dichten von $10^{14} \text{ Ionen/cm}^3$ erreicht. Es ergeben sich jedoch Probleme beim Bau der erforderlichen Magnete sowie bei der anschließenden Energieabfuhr.

Die zweite Möglichkeit, das Lawson-Kriterium zu erfüllen, besteht in einem kurzzeitigen Erreichen sehr großer Dichten. Dies soll durch das Prinzip des Trägheitseinschlusses erzielt werden. Dabei wird Energie in dem Außenbereich einer Hohlkugel deponiert. Das dadurch aufgeheizte Material dampft nach außen ab, und durch dessen Rückstoß wird das weiter innen liegende Material mit dem DT-Brennstoff zum Kugelmittelpunkt beschleunigt. Fig. (I.1) zeigt eine solche Hohlkugel (Pellet), wie sie in der HIBALL-Studie [Bad 81] untersucht wurde.



Fig. I.1

Es handelt sich um ein Pellet mit einer Schale, bestehend aus drei Materialschichten: Einem äußeren Pb-"tamper", einer PbLi-Schicht mit niedrigerer Dichte in der Mitte und der Schicht aus gefrorenem DT-Brennstoff innen. Das meiste Targetmaterial wird benötigt, um den Strahl zu stoppen, während nur ein geringer Teil der PbLi-Schicht als "pusher" benutzt wird, um den Brennstoff "anzutreiben" und von der heißen Depositionszone zu trennen.

Im Prinzip gibt es mehrere Möglichkeiten, Energie auf einem Pellet zu deponieren: Laserstrahlen, leichte Teilchenstrahlen und Schwerionenstrahlen stehen zur Debatte, wobei auf eine kommerzielle Nutzbarkeit geachtet werden muß. Der führende Kandidat ist dabei der Schwerionenstrahl.

- Laser sind zur Zeit noch einen Faktor ≈ 100 unter der erforderlichen Pulsenergie, und außerdem ist das Depositionsprofil ungünstiger als bei Teilchenstrahlen.
- Leichte Teilchenstrahlen würden einen hohen Teilchenfluß erfordern, um die benötigte Pulsenergie zu liefern. Dies führt zu Schwierigkeiten bei der Strahlfokussierung, insbesondere durch Raumladungseffekte.
- Schwerionenstrahlen können dagegen aufgrund ihrer höheren kinetischen Energie wesentlich mehr Leistung deponieren. Der erforderliche Teilchenstrom ist bis zu 10^3 mal kleiner, als bei leichten Ionen [Arn 83].

Wir wollen uns im Folgenden auf die Fusion durch schwerioneninduzierten Trägheitseinschluß konzentrieren.

Neben funktionierender Treibertechnologie und Reaktortechnik ist für die Zündung der Fusion eine optimale Implosion des Pellets erforderlich. Dies wird im wesentlichen durch die Bauart des Pellets sowie durch die Wechselwirkung zwischen Strahl und Pellet bestimmt. Wichtig ist vor allem, die Kugelsymmetrie des Pellets nicht vorzeitig zu zerstören, bzw. ein vorzeitiges Zerschlagen des Pellets zu verhindern.

Der Forderung nach Symmetrieerhaltung könnte man durch eine Bestrahlung aus möglichst vielen unterschiedlichen Richtungen entsprechen. Dem stehen jedoch die Kosten entgegen. Es ist daher offensichtlich, daß hier Kompromisse gefunden werden müssen.

Hydrodynamische Instabilitäten könnten trotz beibehaltener Kugelsymmetrie noch zum Zerschlagen des Pellets führen. Es muß daher für jede anzufertigende Konzeptstudie ermittelt werden, welches die Mindestanforderungen sind, die hydrodynamische Instabilität gerade noch nicht kritisch werden lassen.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem diese Stabilitätsaspekte durch Computersimulation untersucht werden können. Am Beispiel der HIBALL-Studie [Bad 81] sollen dann erste Resultate diskutiert werden. Dabei wird zuerst die Symmetrie eines implodierenden Pellets in Abhängigkeit von der Geometrie des einfallenden Strahles studiert. Danach wenden wir uns den hydrodynamischen Instabilitäten zu, wobei die Rayleigh-Taylor Instabilität die Hauptrolle spielen wird. Da sich die frühe Phase der Rayleigh-Taylor Instabilität anhand linearer analytischer Modelle be-

schreiben läßt, wollen wir unser Verfahren durch Vergleich mit diesen Modellen testen. Dabei sollen erste Aussagen über die Entwicklung einer Rayleigh-Taylor Instabilität im nichtlinearen Bereich gemacht werden.

Zum Schluß wollen wir diskutieren, wie sich das Anwachsen einer Rayleigh-Taylor Instabilität dämpfen läßt.

II. ERHALTUNG DER SPHÄRISCHEN SYMMETRIE

Zunächst wollen wir uns auf die Frage konzentrieren, ob Pellets, die von Schwerionenstrahlen komprimiert werden, aus geometrischen Gründen überhaupt symmetrisch bleiben können. Es wird sich herausstellen, daß bestimmte Strahlanordnungen zu derart starken Störungen führen, daß das Pellet weit vor der eigentlichen Kompressionsphase zerbricht. Für diese Untersuchungen genügt es, nur die hydrodynamischen Flußeigenschaften des aufgeheizten Pushers zu untersuchen. Der Tamper außen und der DT-Brennstoff innen im Pellet können zunächst vernachlässigt werden. Es wird gezeigt, daß die Strahlgeometrie sehr stark die dynamischen Eigenschaften beeinflußt und zu schweren Problemen bei der mechanischen Stabilität des Pellets führen kann.

Zur Durchführung dieser Studien wurde ein zweidimensionales Euler'sches Hydrodynamikprogramm benutzt. Grundlage davon ist der 'SHASTA'-Algorithmus, der von Boris und Book [Bor 73,75,76] entwickelt wurde, und im Anhang näher erläutert ist. Dieser Algorithmus wurde zusammen mit G.Graebner [Buc 80,82, Gra 84] für unsere Zwecke weiterentwickelt.

Da uns zunächst die Dynamik des Pellets zu Beginn der Implosion interessiert, wollen wir unsere Rechnungen auf das Gebiet beschränken, in dem die größten Beschleunigungen auftreten. Dies ist in der Gegend der Fall, wo der Strahl gestoppt wird und sich eine Schockfront bildet. Zur Vereinfachung wurde deshalb nur eine Flüssigkeit, nämlich eine PbLi-Legierung, betrachtet [Bad 81, MtV 81, Arn 83]. In den Rechnungen wurden die Strahl- und

Pellet-Parameter variiert, um die stabilste Konfiguration für eine sphärisch symmetrische Kompression zu ermitteln.

Es soll noch einmal betont werden, daß das Ziel dieses ersten Teils der Arbeit ist, die Symmetrie in der frühen Phase der Pelletkompression zu untersuchen. Keinesfalls soll erwartet werden, daß das System bis zum Zündpunkt verfolgt wird. Obwohl die gesamte Konfiguration vereinfacht betrachtet wird, besteht eine enge Anlehnung an die Parameter der HIBALL Studie [Bad 81], wo ein erstes mögliches Szenarium für schwerioneninduzierten Trägheitseinschluß vorgestellt wird.

II.1 MODELL UND VORGEHENSWEISE

Das hier benutzte Hydrodynamikmodell wird auf einem Euler'schen numerischen Gitter in zwei Dimensionen gelöst. In jeder rechtwinkligen Koordinate stehen 128 Gitterpunkt zur Verfügung, so daß ein Gitterabstand von 0.025 mm gewählt werden kann.

Als Bewegungsgleichungen wurden benutzt:

1) Die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \partial_j (\rho v_j) = 0$$

(II.1)

2) Die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j) = -\partial_i p + \partial_j P_{ij} \quad (11.2)$$

3) Die Gleichung für Energieerhaltung.

$$\partial_t(\rho E) + \partial_j(\rho E v_j) = -\partial_i v_i + \partial_j(\kappa \partial_j T) + \partial_j(P_{ij} v_i) \quad (11.3)$$

Zur Vereinfachung des Problems wurde die Zustandsgleichung für ein ideales Gas gewählt, da sich das PbLi-Gemisch nach der Aufheizung durch den Strahl praktisch wie ein freies Gas verhält [MtV 81]. Der Einfluß der Wärmeleitung in der Energiegleichung (11.3) wurde getestet, indem der Spitzer'sche Koeffizient für die Wärmeleitfähigkeit $\kappa = c_v T^{5/2}$ mit $c_v = 3 \cdot 10^{-18} \text{ GJ}/(\text{mm ns eV})$ eingesetzt und um zwei Größenordnungen nach oben variiert wurde [Spi 61]. Dabei konnte keine nennenswerte Beeinflussung der Dynamik beobachtet werden. Wir vernachlässigen deshalb die Wärmeleitfähigkeit in den folgenden Betrachtungen.

Allerdings könnte sich eine Strahlungs-Wärmeleitung stärker auf die Dynamik auswirken, als die Spitzer'sche [MtV 82, Mar 82a]. Für die Strahlungswärmeleitung κ_R gilt nämlich

$$\kappa_R / \kappa_{\text{Sp.}} \approx 1/3 \cdot 10^{-3} \cdot T^{3/\rho^{1.5}}, \quad (11.4)$$

so daß vor allem bei hohen Temperaturen ein starker Effekt auftritt. Der hohe Wert von κ_R macht dann jedoch eine implizite Integration der

Energiegleichung (II.3) unumgänglich. Eine entsprechende Modifikation der Computerprogramme ist zur Zeit in Arbeit [Cie 84].

II.2 ERGEBNISSE IN ZYLINDERGEOMETRIE

Die Bewegungsgleichungen (II.1-II.3), die den Materiefluß im Pellet beschreiben, werden numerisch auf einem zweidimensionalen rechtwinkligen Gitter gelöst. Da eine große Unsicherheit bezüglich der Strahleigenschaften am Target besteht, wurde zunächst ein Kastenprofil mit konstantem dE/dR gewählt.

Da unsere Studien das prinzipielle Verhalten einer bestrahlten Hohlkugel untersuchen sollen, wurde für die Rechnungen ein vereinfachtes Target gewählt. Insbesondere wird im Folgenden nur die PbLi-Schale ins Pellet-Vakuum hinein beschleunigt. Um die typischen Werte der HIBALL-Studie zu treffen, wurden die Schalen- und Strahl- Parameter dann so gewählt, wie sie sich durch ignorieren von Tamper und DT-Brennstoff aus dem standard HIBALL Fall [Bad 81] ergeben würden. Unser vereinfachtes Pellet besteht daher aus einer PbLi-Schale mit $\rho=1.26 \text{ g/cm}^3$ und $Z=6.84$ zwischen $r=2.1$ und 2.9 mm .

Der zeitliche Verlauf der Strahlleistung wird beschrieben durch

$$p(t) = p_0 \exp(-(t-t_0)^2/\tau^2) \quad (II.5)$$

$$t_0 = 10\text{nsec}, \quad \tau = 5\text{nsec}$$

wobei p_0 nur $p_0 = 3.5 \text{ TW/mm}^2$ ist. Dieser geringe Wert ergibt sich, weil die Hälfte der Leistung im (ignorierten) Pb-Tamper absorbiert wird. Der Strahl wird nach 13 ns abgeschaltet. Die verbleibende Reichweite im PbLi ist dann $\rho R = 7.81 \cdot 10^{-4} \text{ g/mm}^2$ [MtV 81], und für die ersten Rechnungen kann ein paralleler unfokussierter Strahl angenommen werden, der das gesamte Pellet überdeckt (Strahlbreite=6mm). Die Trajektorien der Schwerionen sind parallel zur Strahlachse und es wird angenommen, daß sie sich geradeaus vorwärts bewegen.

Die Beschränkung auf zwei Dimensionen besteht nur aus numerischen Gründen. Aber bereits hiermit ist es möglich, den prinzipiellen Mechanismus zu beschreiben, der zu geometrischen Instabilitäten des Pellets führt. Vor allem die unterschiedliche Dynamik verschiedener Zonen im Pellet kann in zwei Dimensionen bereits sehr gut demonstriert werden. Wir werden im Folgenden zeigen, wie die wichtigsten Aspekte des Problems dreidimensional beschrieben werden können.

Der zugrunde liegende Algorithmus ist extensiv in kernphysikalischen Simulationen angewandt und getestet worden [Buc 81]. Für die Anwendung auf Probleme bei der Fusion durch Trägheitseinschluß wurde als Test eine ideal sphärische Bestrahlung gerechnet. Dabei blieb die sphärische Symmetrie in der numerischen Entwicklung trotz unseres kartesischen Gitters erhalten, bis die erzeugte Schockwelle auf einen Radius von ungefähr 0.3 mm zusammen gelaufen war. Dieser Test ist um so beruhigender, als ja gerade Abweichungen von der sphärischen Symmetrie studiert werden sollen. Die geringen numerischen Abweichungen nahe dem Pelletzentrum sind nicht

kritisch, da hier nicht der Versuch unternommen werden soll, ein derartig spätes Stadium der Kollision zu untersuchen.

Unser zweidimensionales Pellet entspricht einem Schnitt durch einen Zylinder. Wegen dieser zusätzlichen Zylindersymmetrie genügt es, nur ein Viertel dieses zweidimensionalen Pellets zu betrachten (Fig. II.1). In diesem Viertelpellet überlappen drei der vier einfallenden Strahlen, nämlich der Strahl aus dem ersten (eigentlich berechneten) Quadranten und die Strahlen aus dem zweiten und dem vierten Quadranten. Vom Strahl, der aus dem dritten Quadranten kommt, wird angenommen, daß er nicht bis in die berechnete Zone vordringt.

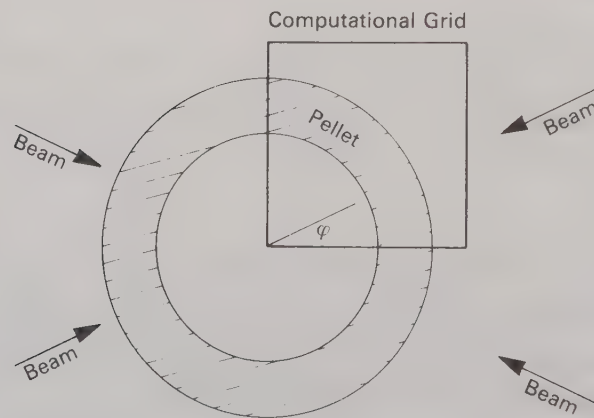


Fig. II.1

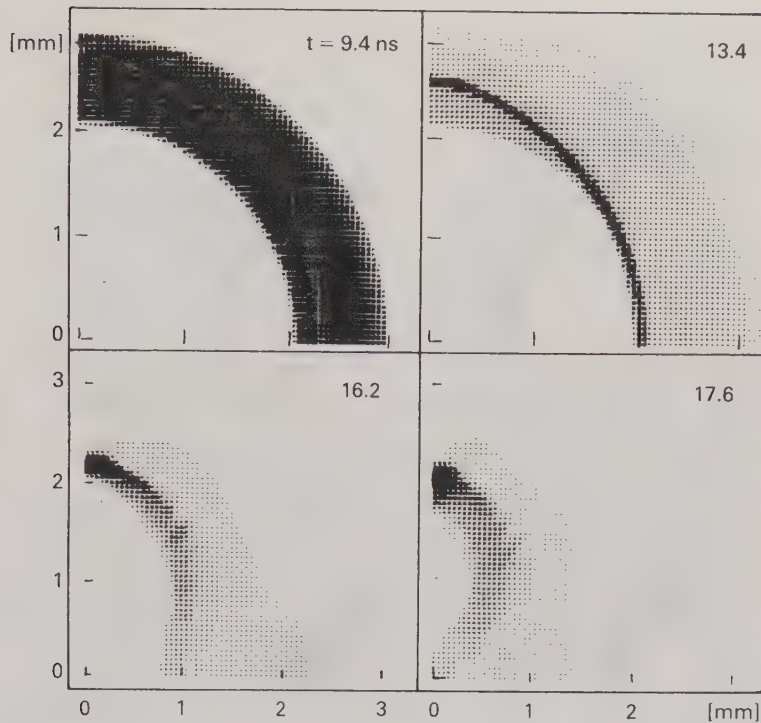


Fig. II.2

Wir wollen zunächst die von der HIBALL-Studie [Bad 81] vorgeschlagene Strahlanordnung untersuchen. Das Pellet wird unter einem Winkel von 10° (gemessen vom Äquator) von vier Strahlen bestrahlt. Die Sequenz von Dichteplots in Fig. II.2 zeigt die zeitliche Entwicklung des Systems. Wegen der Strahlüberlappung sind die Äquatorzonen des Pellets anfänglich wesentlich stärker aufgeheizt, als die Polkappen (Fig. II.2). Deshalb ist die einwärts laufende Schockfront in der Äquatorregion schneller und stärker als an den Polen. Sie erreicht folglich auch das innere Vakuum des Pellets früher

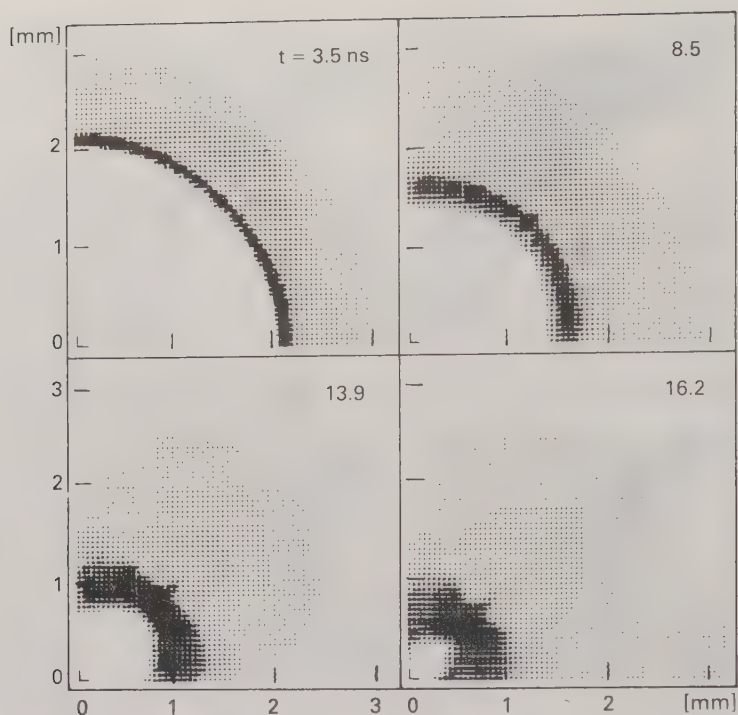


Fig. II.3

als die Schockfront vom Pol. Dies führt zu einem totalen Zerbrechen des Pellets weit bevor die eigentliche Kompressionsphase überhaupt begonnen hat (Fig. II.2). Von einem Zünden des Pellets kann in dieser Konfiguration daher keine Rede sein.

Es wird also offensichtlich ein höheres Maß an Symmetrie bei der Pelletbestrahlung benötigt. Sind nur vier Strahlen zugelassen, wird die größte Symmetrie bei einer zweidimensionalen Simulation durch einen Strahlwinkel von 45° erzielt. Wie wir später sehen werden, ist der Sachverhalt in drei Dimensionen wesentlich komplizierter. Es kann

jedoch gezeigt werden (s.u.), daß dann die größte Symmetrie bei einem Strahlwinkel von $\approx 35^\circ$ relativ zum Äquator erzielt wird, während sich am prinzipiellen Verhalten des Systems nichts ändern sollte.

Fig. II.3 zeigt eine Folge von Dichteplots für vier ebene 45° Strahlen.

Auch hier verursacht der Strahlüberlapp noch Asymmetrien: In den Polar- und Äquator-Regionen herrscht eine stärkere Aufheizung, die wiederum zu Asymmetrien in der Schockfront führt. Diese Asymmetrie ist jedoch schon wesentlich schwächer als bei der 10° -Bestrahlung.

Wie wir in Fig. II.4 sehen, kann die Symmetrie verbessert werden, wenn man ein gaußförmiges Strahlprofil mit

$$f(s) \propto \exp(-s^2/\sigma^2) \tag{II.6}$$

unter 45° benutzt. Die Breite σ beträgt dabei ca. 4 mm (Fig. II.4).

Die Schockfront nähert sich dem Pelletzentrum jetzt nahezu symmetrisch, denn wegen des sich nun ausgleichenden Strahlüberlapps ist die Energiedeposition in allen Pelletbreiten gleich. Dies gilt für die gesamte Anlaufphase der Kompression.

Es spielt also nicht nur die Strahlrichtung eine wichtige Rolle, sondern man muß auch auf die Form des Strahles achten, um eine symmetrische Pelletkompression zu erzielen.

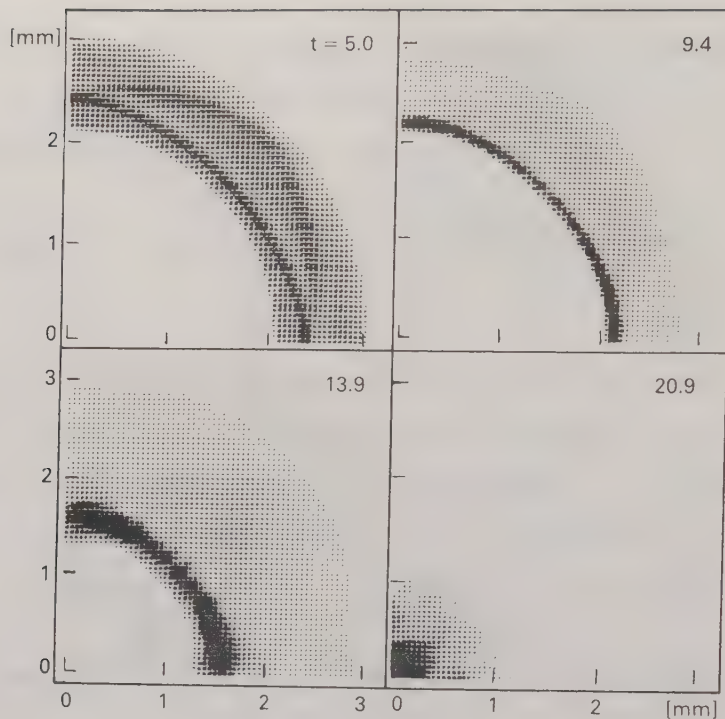


Fig. II.4

Da große Strahlwinkel mit enormen Schwierigkeiten beim Beschleunigerbau verbunden sind, wurde noch ein zweiter Weg untersucht, um Symmetrieprobleme zu vermeiden: Nicht nur die Strahlparameter, sondern auch die Form des Pellet kann verändert werden. Um ein Gefühl dafür zu bekommen, wie stark Pellets deformiert werden müssen, um die Symmetrie innerhalb der HIBALL-Geometrie zu erhalten, wurde ein elliptisch deformiertes Pellet unter 10^0 mit Schwerionen bestrahlt (Fig. II.5).

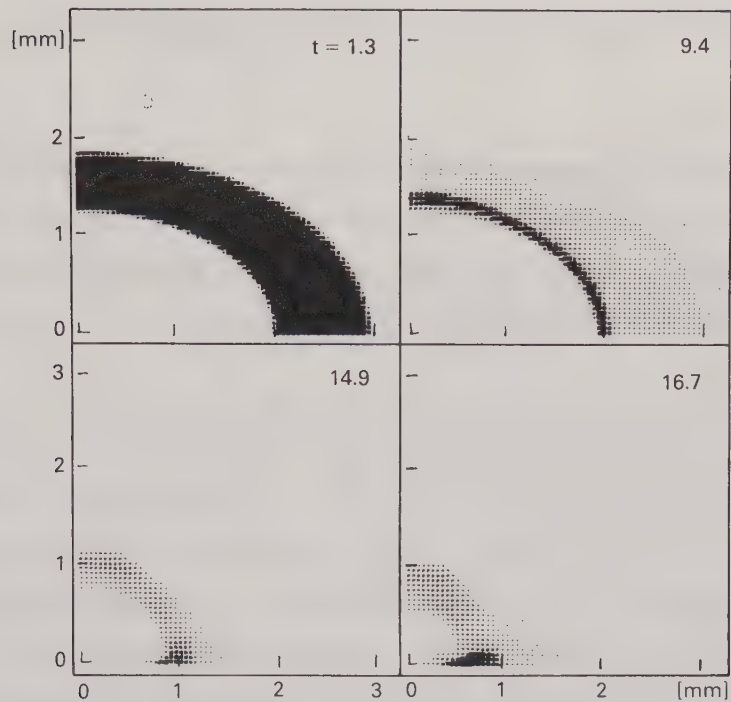


Fig. II.5

Die Deformation, d.h. das Verhältnis der Halbachsen zueinander wurde auf 1.6 gesetzt. In Fig. II.5 sehen wir, daß der Schock jetzt den inneren Hohlraum des Pellets überall zur gleichen Zeit erreicht. Aber wegen der stärkeren Aufheizung durch den Strahlüberlapp am Äquator ist die Front dort schneller, was wieder zu einem asymmetrischen Zusammenbruch führt.

Für eine symmetrische Implosion wäre daher eine noch wesentlich größere Deformation erforderlich.

II.3 QUANTIFIZIERUNG DER BESTRAHLUNGSASYMMETRIE

Die oben gezeigten Rechnungen sind nur zweidimensionale Modellstudien. Um ein Verständnis für die Unterschiede zu einem realen Pellet zu erhalten, wollen wir jetzt ein einfaches analytisches Modell der anfänglichen Energideposition diskutieren.

Zu diesem Zweck nehmen wir Strahlen mit einem willkürlichen Profil $f(s)$ an, wobei $f(s)$ die Intensität des Strahls in einer Entfernung s von der Strahlachse angibt (Fig. II.6). Die Strahlachse soll auf das Pelletzentrum ausgerichtet sein. Es wird nach wie vor mit konstanter Deposition gerechnet, wir werden jedoch die zusätzliche Annahme einer kleinen Eindringtiefe machen. Weiterhin betrachten wir nur das frühe Stadium der Bestrahlung, wo der hydrodynamische Fluß noch nicht begonnen hat.

II.3.1 MODELL IN ZYLINDERGEOMETRIE

Die Energiedeposition an einem Punkt (r, θ) ist abhängig von den Koordinaten des Punktes und vom Polarwinkel θ_b des einfallenden Strahles. Die Deposition beträgt:

$$\begin{aligned}
 D(r, \theta) &= f(|r \cdot \sin(\theta - \theta_b)|) & R - r < \Lambda(\theta) & \quad \text{und} \\
 D(r, \theta) &= 0 & R - r > \Lambda(\theta). &
 \end{aligned}
 \tag{II.7}$$

Hier ist R der Radius des Pellet und $\Lambda(\theta)$ die radiale Eindringtiefe bei einem Winkel θ . $\Lambda(\theta)$ kann leicht durch

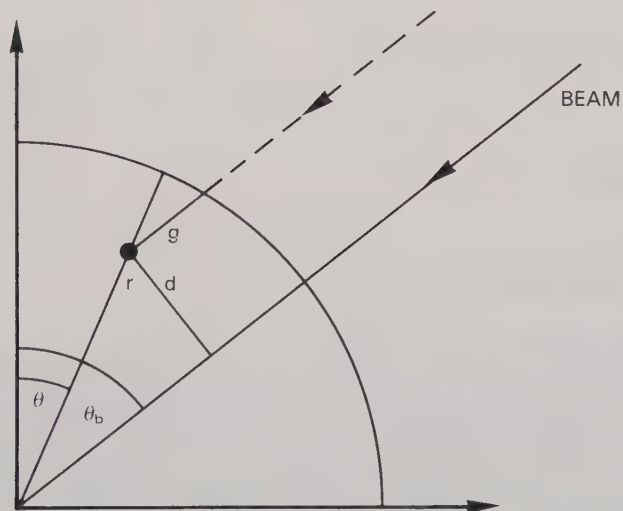


Fig. II.6

$$|(R-\Lambda) \cdot \vec{e}(\theta) + \lambda \vec{e}(\theta_b)| = R \quad (11.8)$$

ausgerechnet werden, wobei $\vec{e}(\theta)$ der Einheitsvektor in θ -Richtung ist und λ die konstante Eindringtiefe in Strahlrichtung bedeutet. In erster Ordnung in Λ und λ ergibt dies:

$$\Lambda(\theta) = \max(\lambda \cos(\theta - \theta_b), 0). \quad (11.9)$$

Jetzt kann die totale Deposition entlang der θ -Richtung ermittelt werden:

$$D(\theta) = \int f(|r \sin(\theta - \theta_b)|) dr \quad (11.10)$$

Genähert ist dies:

$$D(\theta) \approx \Lambda \cdot f(|R \sin(\theta - \theta_b)|). \quad (11.11)$$

In unserer speziellen Situation müssen vier Strahlen unter θ_b , $-\theta_b$, $\pi - \theta_b$, und $\pi + \theta_b$ betrachtet werden. Anschließend müssen die einzelnen Beiträge der verschiedenen Strahlen addiert werden.

Wir ermitteln diesen Ausdruck für ein Gaussprofil

$$f(s) \propto \exp(-s^2/\sigma^2) \quad (11.12)$$

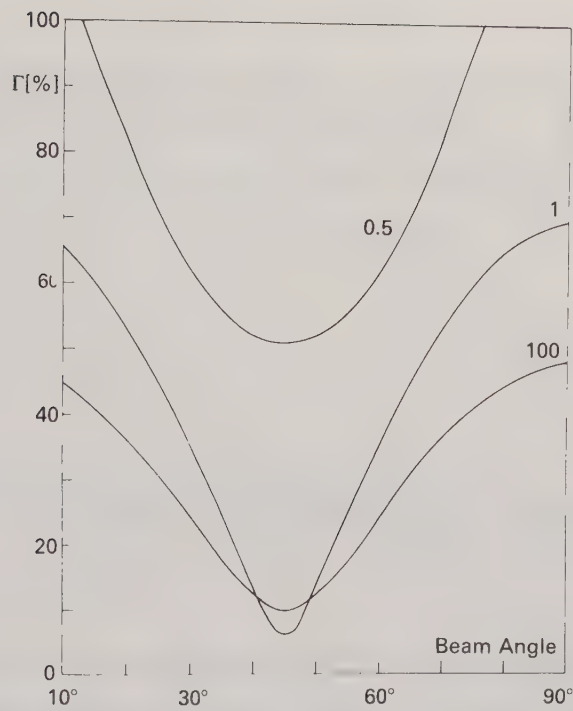


Fig. II.7

und bestimmen die mittlere quadratische Abweichung von $D(\theta)$, normalisiert auf den Mittelwert $\overline{D(\theta)}$:

$$\Delta = \sqrt{\overline{D(\theta)^2} - \overline{D(\theta)}^2} / \overline{D(\theta)}. \quad (\text{II.13})$$

Δ ist als Funktion von θ_b in Fig. II.7 gezeigt. Es ist nicht überraschend, daß sich die beste Symmetrie für $\theta_b = 45^\circ$ ergibt. Für andere Winkel läßt sich ein starker Anstieg von Δ beobachten. Da die vier Strahlen aus $\theta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$ und 270° überlappen, kann die Symmetrie verbessert werden, wenn die Strahlintensität an den äußeren Rändern

des Strahls herabgesetzt wird. Dies zeigt sich durch die Abhängigkeit von σ in Fig. II.7. Die beste Symmetrie mit $\Delta=0.016$, wurde für $r_{\theta_b}=45^\circ$, $\sigma \approx 1.3$ R gefunden. Dies entspricht der numerischen Studie in Fig. II.4.

II.3.2 DAS MODELL FÜR SPHÄRISCHE GEOMETRIE

Im Prinzip können die Symmetrieverhältnisse in drei Dimensionen gänzlich anders sein. Da viele Strahlen an den Polen miteinander wechselwirken, sollte ein polarer Strahlwinkel von mehr als 45° zum besten symmetrischen Verhalten führen.

Zur weiteren Analyse nehmen wir an, daß die Bestrahlung axialsymmetrisch erfolgt (im HIBALL-Design z.B. fallen 20 Strahlen unter dem selben Polarwinkel ein). Die Rechnung verläuft analog zum obigen Modell mit der Ausnahme, daß die Strahlen nicht in der $\phi=0$ -Ebene zu sein brauchen wie bei Fig. II.6. Die Ergebnisse müssen jetzt über den Azimuthwinkel ϕ_b zwischen dem Strahl und dem betrachteten Radius integriert werden. Das Skalarprodukt der Einheitsvektoren in Strahlrichtung und in der Richtung des Testpunktes ($r, \theta, \phi=0$) ist:

$$\epsilon = \vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_b = \sin\theta \sin\theta_b \cos\phi_b + \cos\theta \cos\theta_b \quad (II.14)$$

Die deponierte Energie am Testpunkt ist:

$$D(\theta) = f(r\sqrt{1-\varepsilon^2}) \quad (11.15)$$

und die Eindringtiefe ist in erster Ordnung:

$$\Lambda(\theta) = \max | \lambda \varepsilon, 0 |. \quad (11.16)$$

Die totale Deposition in der Richtung $(\theta, \phi=0)$ ist

$$D(\theta) \approx \lambda f \varepsilon f(r\sqrt{1-\varepsilon^2}) d\phi_b \quad (11.17)$$

wobei die Integration entlang aller beitragenden Strahlen geht. Der Grenzwinkel ϕ_0 wird durch die Eindringtiefe bestimmt:

$$\cos(\phi_0) = -(\lambda/2R + \cos\theta\cos\theta_b)/(\sin\theta\sin\theta_b). \quad (11.18)$$

Die zylindrisch angeordnete Gruppe von Strahlen aus θ_b wird von den unteren Strahlen aus $-\theta_b$ überlagert. Die Ergebnisse der Rechnungen sind für Strahlen mit verschiedenen Gaussprofilen in den Figuren 11.8 bis 11.10 gezeigt. Der Effekt der Strahlbreite ist ganz offensichtlich: für breite Strahlen kommt die Bestrahlungsasymmetrie hauptsächlich durch die Überlagerung der Strahlen, während für schmale Strahlen eine stark gehäufte Verteilung um den Strahlwinkel zu beobachten ist.

Es ist etwas schwieriger, als im zylindrischen Fall, eine einzige die Symmetrie der Bestrahlung charakterisierende Größe zu definieren. Die Standarddefinition des Mittelwertes auf der Kugeloberfläche (im Folgenden als "sin(θ) weight" bezeichnet)

$$D(\theta) = \int D(\theta) d\Omega \tag{11.19}$$

könnte die Effekte unterschätzen, da wir vollständige Symmetrie in der ϕ -Koordinate angenommen haben und diese Mittelungsmethode alle Winkелеlemente gleich stark wichtet. Die alternative Formel

$$D(\theta) = \int D(\theta) d\theta \tag{11.20}$$

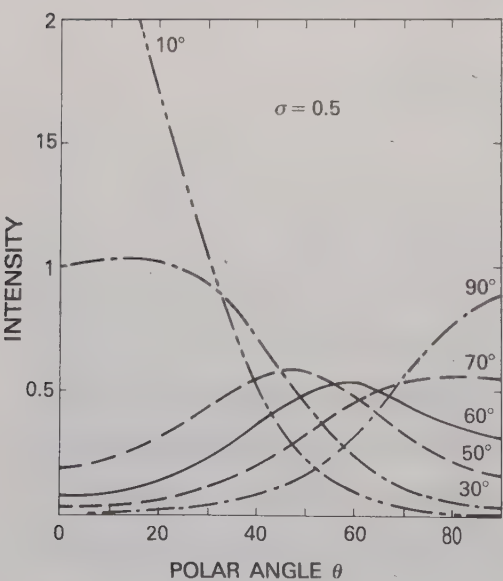


Fig. 11.8

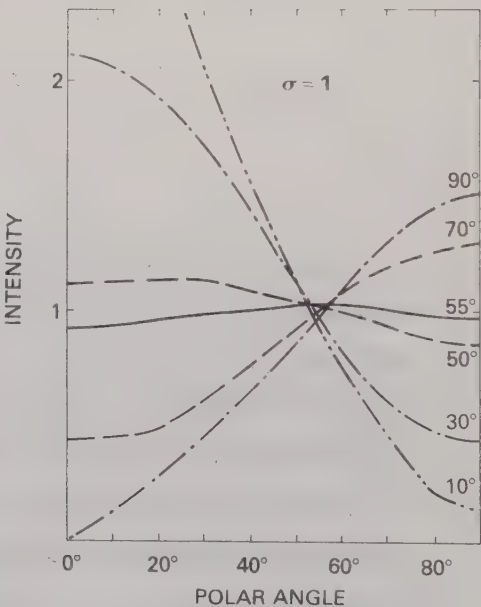


Fig. 11.9

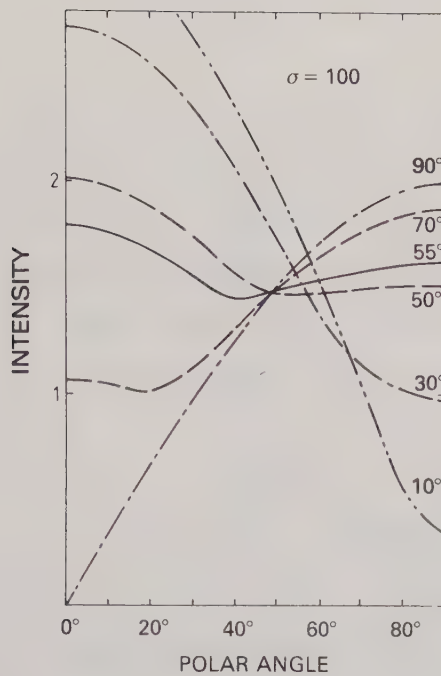


Fig. II.10

("constant weight") ist eigentlich für zylindrische Symmetrie angebracht, aber sie könnte die Pole in der Mittelung überbewerten.

Um eine faire Abschätzung zu erhalten, zeigen wir in Fig. II.11 die Ergebnisse für beide Mittelungsmethoden (II.19) und (II.20). Die aufgetragene Größe ist Δ , die mittlere relative Abweichung von der Symmetrie.

Offensichtlich zeigen beide Formeln nahezu das gleiche Ergebnis für den optimalen Strahlwinkel. Genauere Untersuchungen führen zu den optimalen Werten für die Strahlbreite $\sigma \approx 1.3 R$ und für den

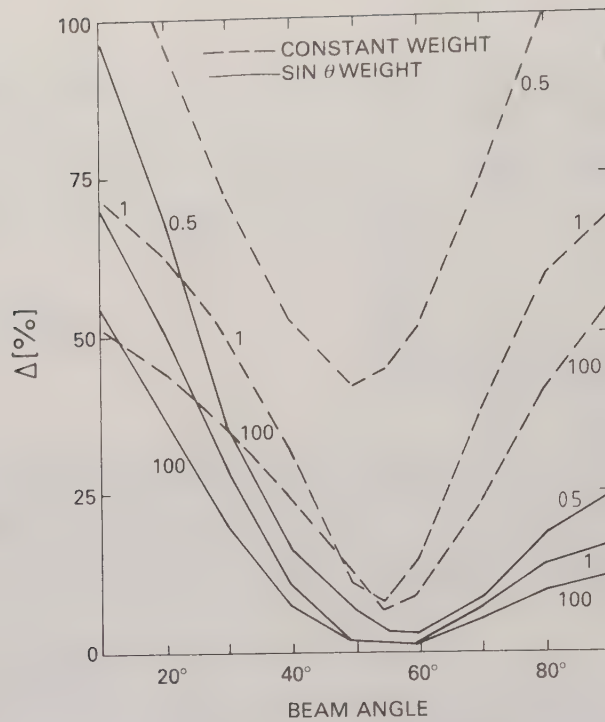


Fig. II.11

Polarwinkel des Strahles $\theta_b \approx 57^\circ$ entsprechend 33° über der Äquatorialebene.

II.3.3 VERGLEICH

Das wichtige Ergebnis dieser Studien ist die Ähnlichkeit der Kurven in Fig. II.7 und Fig. II.11. Dies bedeutet, daß die Probleme in der eigentlich dreidimensionalen Situation qualitativ ähnlich sein werden, wie sie von den zweidimensionalen Studien beschrieben wurden. Es muß daher auf jeden Fall versucht werden, eine optimale Bestrahlungsgeometrie zu erreichen.

II.4 ZWISCHENBETRACHTUNG

Wir haben gezeigt, daß die Geometrie der Energiedeposition eine entscheidende Rolle für die dynamische Stabilität von Targets bei der Fusion durch Trägheitseinschluß spielt. Die wichtigsten Parameter für die Qualität der Pelletimplosion sind der Winkel der einfallenden Strahlen und die Strahlform.

Wir haben gezeigt, daß der optimale Strahlwinkel im HIBALL-Konzept bei ca. 33° über der Äquatorebene liegt und daß die Strahlen ein Gaussprofil haben sollten, dessen Breite mit dem Pelletdurchmesser vergleichbar ist.

III. RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITÄTEN

Die bisher geschilderte Problematik überdeckt nur einen Ausschnitt aus dem Bereich der Stabilitätsprobleme am Pellet. Wie bereits in der Einleitung geschildert, haben auch Rayleigh-Taylor Instabilitäten einen sehr großen Einfluß auf die Pelletdynamik. Sie können neben den bereits betrachteten Symmetrieproblemen zu einem vorzeitigen Zerschlagen der implodierenden Hohlkugel führen. Für die Fusion durch laserinduzierten Trägheitseinschluß wurden bereits einige Studien durchgeführt, auf die wir im Folgenden kurz eingehen wollen. Zunächst soll jedoch die grundlegende Problematik der Rayleigh-Taylor Instabilität umrissen werden: Rayleigh-Taylor Instabilitäten können immer dann auftreten, wenn eine schwere von einer leichteren Flüssigkeit beschleunigt wird. Ein gängiges Beispiel für diese Tatsache läßt sich durch ein halb gefülltes Weinglas demonstrieren, das auf den Kopf gestellt wurde (Fig. III.1).

Man sollte nun annehmen, daß die Flüssigkeit in Ruhe bleibt, da die Luft in der Flüssigkeit einen gleichmäßigen Auftrieb erfährt, der dem Gewicht der Flüssigkeit entgegen wirkt, und somit die Flüssigkeit nach oben beschleunigt. Dadurch sollte die Schwerkraft schließlich ausgeglichen werden. In der Praxis ist dies jedoch nicht der Fall, denn bereits eine geringe Störung in der Grenzfläche Luft/Flüssigkeit, wie sie immer auftreten kann, wächst exponentiell an, bis schließlich die Grenzschicht aufbricht. Das gleiche Problem ergibt sich nun auch beim Pellet (Fig. III.2). Hier wird z.B. eine sich aufbauende Schockfront hoher Dichte durch dünneres, abdampfendes Material beschleunigt.

Zum Verständnis der Rayleigh-Taylor Instabilität genügt es, zunächst die Instabilität zwischen zwei Schichten zu untersuchen. Nachdem wir uns die Zusammenhänge anhand eines einfachen analytischen Modells verdeutlicht haben, wollen wir anschließend systematische numerische Studien zur Rayleigh-Taylor Instabilität vornehmen.

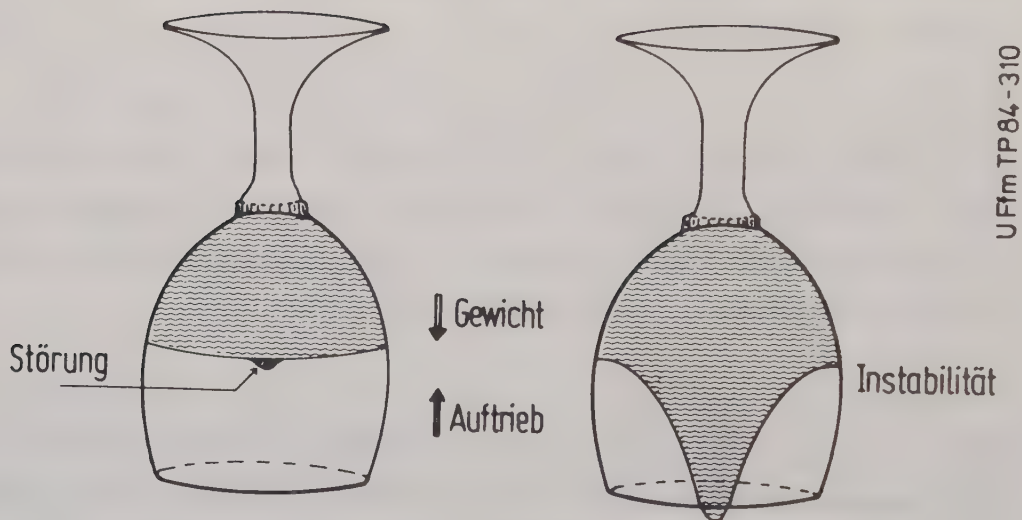


Fig. III.1

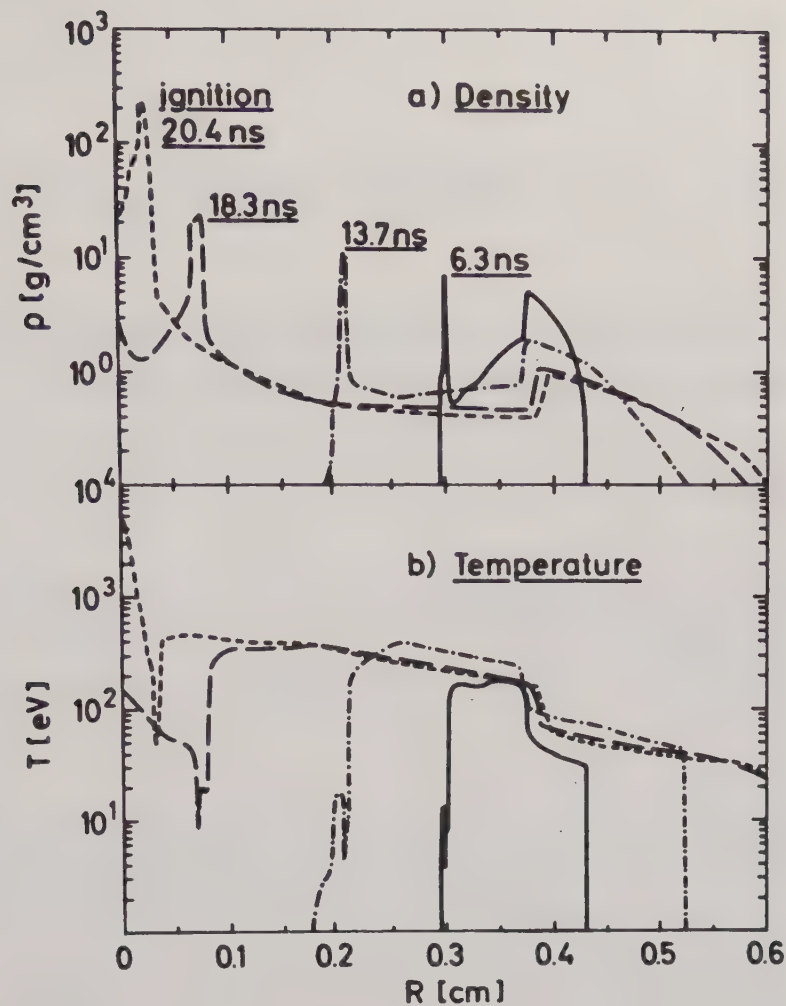


Fig. III.2

III.1 EIN EINFACHES ANALYTISCHES MODELL

In diesem Modell [Har 71] wollen wir einige Annahmen machen, die eine einfache analytische Beschreibung ermöglichen:

Zunächst soll es sich bei der hier betrachteten Konstellation um zwei übereinander liegende Flüssigkeiten in einem Gravitationsfeld

handeln, deren Trennschichtstörung anfänglich nur eine kleine Amplitude hat.

Weiterhin seien die beiden Flüssigkeiten inkompressibel. Aus der zweidimensionalen Kontinuitätsgleichung erhalten wir dann:

$$\partial_x u + \partial_y v = 0 \quad (\text{III.1})$$

Wobei u die Geschwindigkeit in x - und v die Geschwindigkeit in y -Richtung ist. Die Impulskomponenten ergeben:

$$\rho \partial_t u + \partial_x p = 0 \quad (\text{III.2})$$

und

$$\rho \partial_t v + \partial_y p - \rho g = 0 \quad (\text{III.3})$$

Dabei ist Materietransport entsprechend unserer Annahme vernachlässigt. p ist der lokale Druck und g steht für die Gravitation. Gleichung (III.1) kann mit Hilfe einer Potentialfunktion ϕ gelöst werden, für die gilt: $u = -\partial_x \phi$; $v = -\partial_y \phi$. Wir erhalten dann für Gleichung (III.1):

$$\partial_x^2 \phi + \partial_y^2 \phi = 0 \quad (\text{III.4})$$

Einsetzen in (III.2) und (III.3) ergibt:

$$\partial_x (p - \rho \partial_t \phi) = 0 \quad (III.5)$$

und

$$\partial_y (p - \rho \partial_t \phi - \rho g y) = 0 \quad (III.6)$$

Gleichung (III.5) und (III.6) sind konsistent für einen Druck

$$p = p_o + \rho \partial_t \phi + \rho g y \quad (III.7)$$

Wir wollen nun annehmen, daß die Trennfläche zwischen den beiden Flüssigkeiten cosinusförmig gestört ist:

$$y_{\text{Trennfl.}} = A(t) \cos kx \quad (III.8)$$

Die Funktion $A(t)$ beschreibt dabei den zeitlichen Verlauf der Störung und soll im Folgenden bestimmt werden. Die beiden Flüssigkeiten in unserem Modell haben im Allgemeinen unterschiedliche Drucke:

$$p_{\text{oben}} = p_{o \text{ oben}} + \rho_{\text{oben}} g y + \rho_{\text{oben}} \partial_t \phi_{\text{oben}} \quad (III.9)$$

und

$$p_{\text{unt.}} = p_{0 \text{ unt.}} + p_{\text{unt.}} g y + p_{\text{unt.}} \frac{\partial}{\partial t} \phi_{\text{unt.}} \quad (\text{III.10})$$

Um $A(t)$ zu bestimmen, machen wir für ϕ_{oben} und ϕ_{unten} den Ansatz:

$$\phi_{\text{oben}} = e^{-ky} f(t) \cos kx \quad (\text{III.11})$$

und

$$\phi_{\text{unt.}} = -e^{ky} f(t) \cos kx \quad (\text{III.12})$$

Es müssen noch die Randbedingungen eingearbeitet werden, wobei wir voraussetzen wollen, daß die Trennebene in Ruhe ist. Es gilt dann mit (III.8) und (III.11) bzw. (III.12):

$$dA(t)/dt = k f(t) \quad (\text{III.13})$$

Nehmen wir nun noch an, daß an der Trennschicht die Drucke von oben und unten (und auch die p_0) gleich sind, so ergibt sich aus (III.9) = (III.10) an dieser Stelle unter Berücksichtigung von (III.11), (III.12) und (III.13):

$$d^2 A/dt^2 = A [\cdot kg (p_2 - p_1)/(p_2 + p_1)] \quad (\text{III.14})$$

Diese Differentialgleichung hat die bekannte Lösung

$$A = A_0 e^{nt} , \quad (III.15)$$

wobei die exponentielle Wachstumsrate gegeben ist durch

$$n^2 = kg (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1) \quad (III.16)$$

Gleichung (III.16) zeigt, daß ein exponentielles Wachstum der Störung nur entsteht, wenn eine größere Dichte von einer kleineren beschleunigt wird. Wegen der hier gemachten vereinfachenden Annahmen gilt Gleichung (III.16) jedoch nur für den Beginn einer sich entwickelnden Instabilität. Trotzdem haben wir mit Gleichung (III.16) die Möglichkeit, die Entwicklung einer Rayleigh-Taylor Instabilität im implodierenden Pellet abzuschätzen: Bei einem Pelletradius in der Größenordnung $r \approx 1 \text{ mm}$ und einer Implosionszeit von $t_c \approx 5 \text{ ns}$ [MtV 81] ist die Beschleunigung

$$g = 2R/t_c^2 \approx 8 \cdot 10^{15} \text{ [cm/sec}^2\text{]} \quad (III.17)$$

Eine typische Störung der Oberfläche dürfte im Bereich $\lambda \approx 1/10 \text{ mm}$ liegen. Für die Wellenzahl k der Störung ergibt sich dann:

$$k = 2\pi/\lambda \approx 10^3 \text{ [1/cm]} \quad (III.18)$$

Einsetzen von (III.17) und (III.18) in (III.16) liefert bei einer Atwood-Zahl $At = (\rho_1 - \rho_2) / (\rho_2 + \rho_1)$ von $At = 0.5$:

$$\begin{aligned}
 n^2 &\approx 10^3 \text{ 1/cm} \cdot 8 \cdot 10^{15} \text{ cm/sec}^2 \cdot 0.5 \\
 &= 4 \cdot 10^{18} \text{ 1/sec}^2 \\
 \implies n &\approx 2 \cdot 10^9 \text{ 1/sec}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt eine typische Zeitskala von $1/n \approx 0.5 \text{ ns} = 1/10 t_c$. Eine Rayleigh-Taylor Instabilität könnte deshalb im implodierenden Pellet starke Auswirkungen haben.

Es gibt ausführliche analytische Untersuchungen [Cha 61, Suy 78], in denen die hier gemachten Vereinfachungen aufgegeben werden. Insbesondere wird dort gezeigt, daß es bei der Berücksichtigung von Viskosität und Oberflächenspannung kritische Wellenlängen geben kann, bei denen die Wachstumsrate n ein Maximum aufweist. Dies hängt bei endlicher Dicke der dichteren Flüssigkeit im Wesentlichen von den Parametern Störungsamplitude zu Störungswellenlänge A/λ und Störungsamplitude zu Schichtdicke $A/\Delta x$ ab [Suy 78, Fra 74, Mas 75, Tay 50, Cha 61, McC 81, McC 77]. Wir werden später auf diesen Sachverhalt zurückkommen.

Weiterhin hat eine endliche Ausdehnung der Trennschicht zwischen den beiden Flüssigkeiten einen Einfluß auf die Wachstumsraten der Störungen. Auch darauf werden wir später zurückkommen.

III.2 NUMERISCHE RTI-STUDIEN

Wir wollen uns nun numerischen Studien über Rayleigh-Taylor Instabilitäten zuwenden. Damit läßt sich auch für große Zeiten, also auch für den nichtlinearen Bereich, eine Aussage über die Entwicklung von Rayleigh-Taylor Instabilitäten machen. Insbesondere kann die Frage beantwortet werden, inwieweit das in Gleichung (III.15) gefundene exponentielle Wachstum der Störung anhält.

Es liegt die Vermutung nahe, daß irgendwann ein Übergang zur Dynamik des freien Falles (mit Reibung) des dichteren Mediums durch das dünnere stattfindet.

III.2.1 ÜBERBLICK ÜBER EXISTIERENDE RECHNUNGEN

Im Zusammenhang mit der lasergetriebenen Trägheitsfusion existieren bereits einige numerische Studien über Rayleigh-Taylor Instabilitäten [Dal 67, Fre 77, Ver 82].

Diese Autoren untersuchten größtenteils nichtviskose, inkompressible Flüssigkeiten und verfolgten das prinzipielle Verhalten einer Rayleigh-Taylor Instabilität.

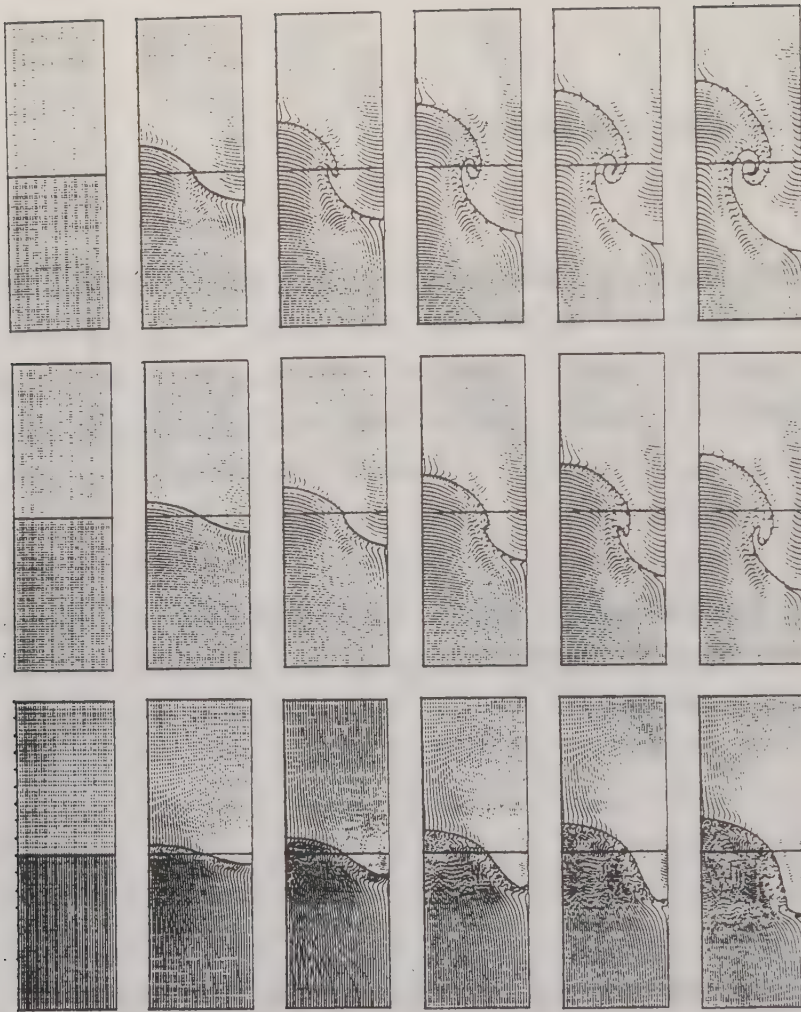


Fig. III.3

Fig. III.3 zeigt die Resultate von Daly [Dal 67], die mit einem particle-in-cell-Verfahren [Har 66] erzielt wurden.

Hier kann die Entwicklung einer Rayleigh-Taylor Instabilität für verschiedene Atwood-Zahlen At simuliert werden. Die erste Zeile von

Fig. III.3 zeigt die RTI-Entwicklung bei $At=0.048$. Bei der zunächst cosinusförmigen Störung wächst die untere Halbwelle (spike) wesentlich schneller an, als die obere (bubble). Da sich die spike-Spitze schnell durch das etwas dünnere Medium bewegt, entwickelten sich durch das entgegengesetzte Strömen der Flüssigkeiten Wirbel, die sich im Laufe der Zeit vergrößern. Diese KELVIN HELMHOLTZ-INSTABILITÄT wird mit zunehmender Atwood-Zahl schwächer. Das ist in den folgenden Zeilen von Fig. III.3 mit $At=0.33$ bzw. $At=0.82$ klar erkennbar.

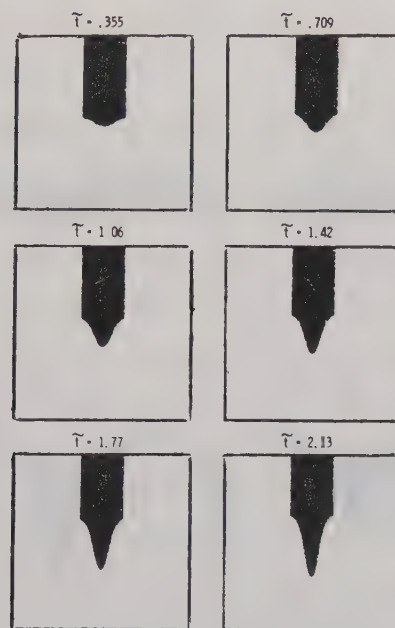


Fig. III.4

Fig. III.4 zeigt die Ergebnisse von Freemann et al. [Fre 77], die ähnlich aussehen, wie bei Fig. III.3, aber mit $At=1$ gerechnet wurden.

In einer neueren Arbeit von Verdon et al. [Ver 82] wird erstmals der für die Trägheitsfusion eigentlich interessante Fall einer gestörten Folie studiert, die gegen ein dünneres Medium beschleunigt wird (Fig. III.5).

Den Autoren stand für diese Rechnungen jedoch nur ein Lagrange'sches Computerprogramm zur Verfügung, in dem Effekte wie Kelvin Helmholtz-Instabilitäten nur schwer darzustellen sind: In

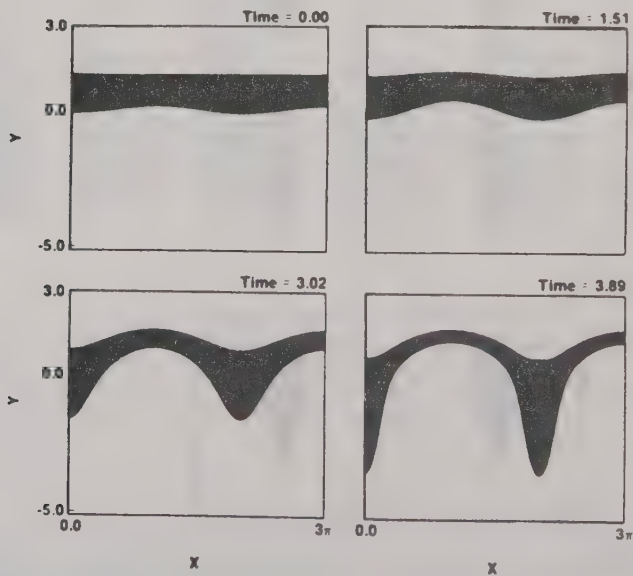


Fig. III.5

einem solchen Computergitter werden die Rechenpunkte praktisch mit der Flüssigkeit bewegt, was bei Wirbeln zu enormen numerischen Problemen führt. Dies dürfte der Hauptgrund dafür sein, daß man sich auf Studien mit $At=1$ beschränkte. Dort treten nämlich keine Kelvin Helmholtz-Instabilitäten auf (s.o.).

In Fig. III.5 erkennt man bereits deutlich, wie die Folie durch das Auftreten der Rayleigh-Taylor Instabilität dünner wird. Auch das Spike-Wachstum ist erkennbar.

Wir wollen in den nun folgenden Studien das Verhalten einer beschleunigten gestörten Folie detailliert untersuchen. Dabei wurde im Gegensatz zu den bisher veröffentlichten Arbeiten Kompressibilität zugelassen. Weiterhin werden die Bewegungsgleichungen mit einem Euler'schen Computerprogramm (s. Anhang) integriert. Hier sind die Gitterpunkte fest im Raum und die Flüssigkeit bewegt sich über das Gitter. Dadurch ist es möglich, starke Wirbel, wie sie z.B. in Kelvin Helmholtz-Instabilitäten auftreten, problemlos zu beschreiben. Wir sind somit frei in der Wahl der Atwood-Zahl. Die Genauigkeit, mit der die Trennlinie untersucht wird, hängt im Wesentlichen vom Gitterpunktabstand und somit von der Anzahl der Gitterpunkte ab.

Mit bis zu 256 Punkten in einer Richtung läßt uns das Modell auch hier einen sehr großen Spielraum (s. Anhang). Weiterhin ermöglicht unser Modell, den Einfluß von Viskosität auf die Entwicklung einer Rayleigh-Taylor Instabilität systematisch zu untersuchen.

III.2.2 BEWEGUNGSGLEICHUNGEN

In den folgenden Betrachtungen werden die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_t \rho + \partial_i (\rho v_i) = 0, \quad (III.19)$$

die Navier Stokes-Gleichungen

$$\partial_t (\rho v_i) + \partial_j (\rho v_i v_j) = -\partial_i p + \partial_j P_{ij} - g \quad (III.20)$$

sowie eine Erhaltungsgleichung für die Energie integriert:

$$\partial_t (\rho E) + \partial_i (\rho E v_i) = -\partial_i v_i + \partial_i (\kappa \partial_i T) + \partial_j (P_{ij} v_i) \quad (III.21)$$

Für den Druck p wurde der Druck eines idealen Gases

$$p = (\gamma - 1) \rho k T \quad (III.22)$$

eingesetzt. Der Newton'sche Reibungstensor wurde in Standardform übernommen:

$$P_{ij} = \eta (\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{2}{3} \xi \delta_{ij} \partial_k v_k \quad (III.23)$$

wobei die Scherviskosität η einen wesentlich größeren Einfluß auf die Dynamik zeigt, als die Volumenviskosität ξ . Als Beschleunigung wurde ein Gravitationsfeld eingesetzt, dessen Größe mit $g=10^{17} \text{ cm/sec}^2$ in der Gegend der Pellet-Parameter liegt.

Die Energie in Gleichung (III.21) setzt sich aus einem thermischen und einem kinetischen Anteil zusammen:

$$E = c_v T + 1/2 v^2 \quad (\text{III.24})$$

Der Viskositätskoeffizient η wurde in den folgenden Rechnungen systematisch variiert, während die Wärmeleitfähigkeit zunächst vernachlässigt wird. (Es hat sich bei den Symmetriestudien gezeigt, daß die Wärmeleitfähigkeit nur einen sehr geringen Einfluß auf die Dynamik hat.) Das Gleichungssystem (III.19)-(III.21) wird mit dem "Flux Corrected Transport Algorithmus (FCT)" von Boris und Book [Bor 73,75,76, Buc 80, Mar 82, Gra 84] zeitlich integriert. Dabei wird je nach Problemstellung ein numerisches Gitter mit 64×64 bzw. mit 128×128 oder mit 64×256 Punkten benutzt. Auf diese Weise kann eine ausreichende Auflösung erzielt werden, um die Entwicklung einer Rayleigh-Taylor Instabilität gut zu beschreiben. Eine detaillierte Erklärung des numerischen Verfahrens wird im Anhang gegeben.

III.2.3 ERGEBNISSE DER RTI-STUDIEN

Zunächst soll untersucht werden, ob unser Modell im Stande ist, die Ergebnisse früherer Arbeiten zu reproduzieren [Dal 67, Fre 77, Ver 82]. Dazu wird zuerst der "klassische" Fall einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit untersucht, die gegen eine leichtere beschleunigt wird.

Anschließend wollen wir die Dynamik einer beschleunigten gestörten Folie studieren. Dabei werden wir erstmals bemerkenswerte Effekte, wie z.B. sekundäre Rayleigh-Taylor Instabilitäten untersuchen.

III.2.3.1 VERGLEICH MIT ANDEREN ARBEITEN

Figur III.6 zeigt die Geschwindigkeitsvektoren und die Dichtekonturen zu vier verschiedenen Zeitpunkten unserer Rechnung.

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurde nur jeder vierte Geschwindigkeitsvektor eingezeichnet. D.h. die eigentliche numerische Genauigkeit ist noch wesentlich größer, als anhand der Zeichnung angenommen werden kann.

Die Trennschicht der beiden Flüssigkeiten wird mit einer Anfangsamplitude von 0.05 mm und einer Wellenlänge von 0.8 mm sinusförmig gestört. Die Anfangsstörung ist also auf jeden Fall klein

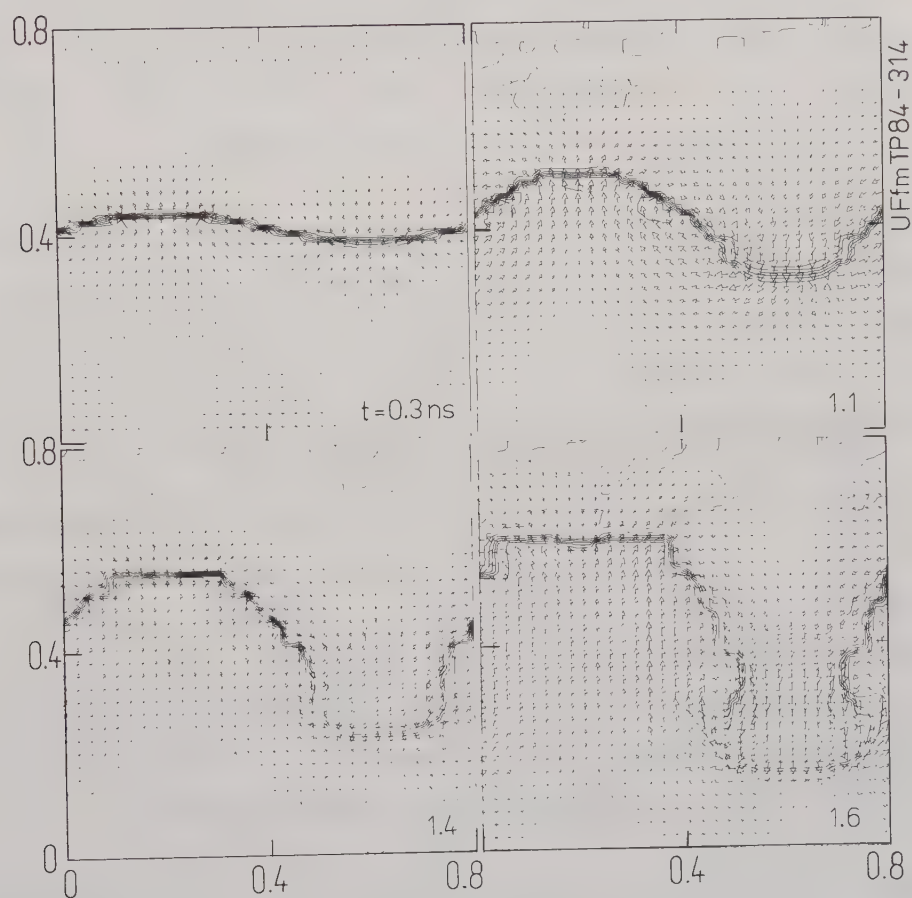


Fig. III.6

gegen ihre Wellenlänge und gegen die Ausmaße des Systems. Zumindest in der Anfangsphase können die Ergebnisse daher mit Abschätzungen linearer analytischer Modelle verglichen werden.

Bereits nach 0.3 ns ist das Anwachsen der Störung deutlich sichtbar. Der untere Teil der Störung (spike) und der obere Teil (bubble) scheinen zu diesem Zeitpunkt noch gleichschnell zu wachsen. Nach 1.1 ns kann man jedoch einen deutlichen Unterschied in der Ausdehnung von spike und bubble erkennen.

Am Nulldurchgang der Störung hat sich durch das Aufsteigen der oberen Störungshalbwelle und dem Absinken des spikes ein Wirbel gebildet. Dieser Wirbel bleibt in der Nähe des spike-Kopfes ($t=1.4$ ns) und führt schließlich zur deutlichen Ausbildung einer Kelvin Helmholtz-Instabilität.

Damit zeigt Fig. III.6 die selbe Dynamik wie die Rechnungen in [Dal 67] (s.o.). Fig. III.6 macht deutlich, daß es bis ca. 1.4 ns gerechtfertigt scheint, inkompressibel zu rechnen. Kommt man jedoch in den stark nichtlinearen Bereich des Systems, so ergeben sich sowohl im spike, als auch im bubble große Dichteunterschiede. Es scheint also gerade im interessanten nichtlinearen Bereich unerlässlich, mit einem kompressiblen Modell zu arbeiten.

Bei Verdopplung der Wellenzahl (Fig. III.7) ergibt sich eine analoge Entwicklung. Bereits nach 1 ns wird die Nichtlinearität deutlich.

Die Kelvin Helmholtz-Instabilität an der spike-Spitze ist nach 1.4 ns schon gut entwickelt. Es scheint sich sogar auf halber spike-Länge eine sekundäre Kelvin Helmholtz-Instabilität auszuprägen, die nach

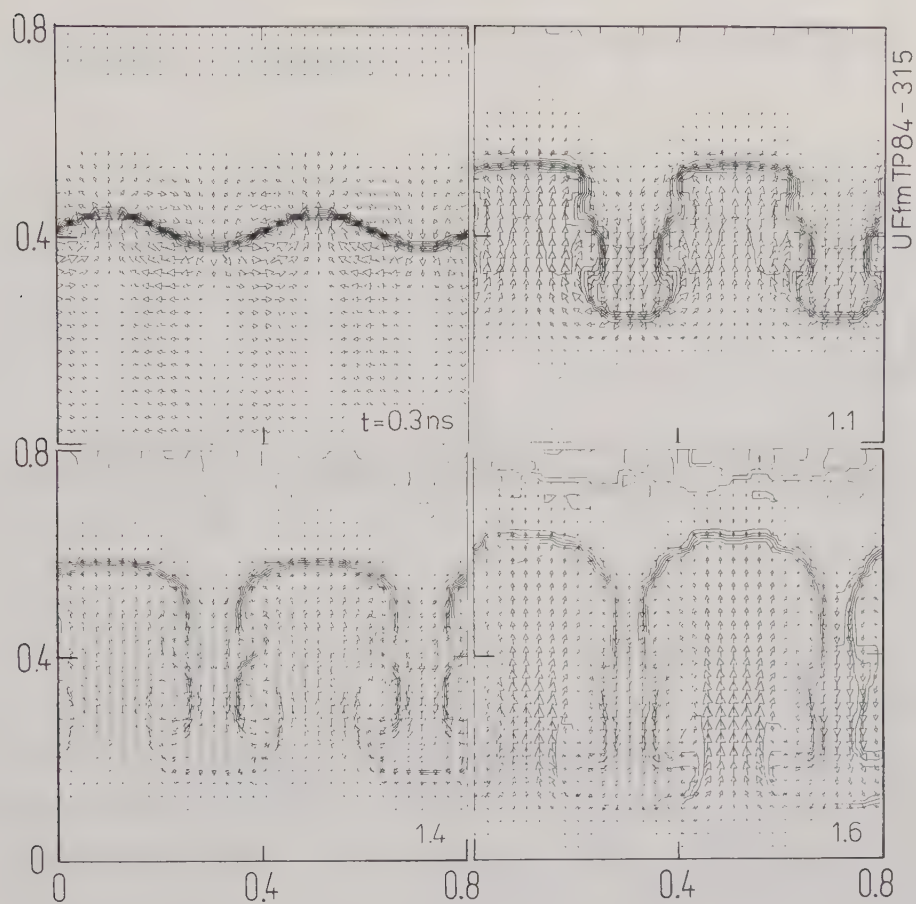


Fig. III.7

rund 1.6 ns zu einem deutlichen Aufweichen der Trennschicht zwischen den Flüssigkeiten führt.

Die Ausbildung von Kelvin Helmholtz-Instabilitäten vergrößert den Strömungswiderstand

$$W \propto A \cdot c_w \cdot v^2$$

(III.25)

des spikes: Ohne Kelvin Helmholtz-Instabilität wären sowohl die Stirnfläche A des spikes als auch der Widerstandsbeiwert c_w geringer. Der spike hätte dann ein fast tropfenförmiges Profil (s. Fig. III.3), was die "aerodynamisch" günstigste Form für einen umströmten Körper darstellt.

Die Wachstumsrate in der linearen Näherung ergäbe sich mit Gleichung (III.16) und den hier benutzten Werten von $\lambda=0.8$ mm, $g=10^{17}$ cm/sec² und $At=0.6$ zu $n=2.17$. Nimmt man jedoch die spike-Länge aus Fig. III.6 zu den entsprechenden Zeitpunkten im linearen Bereich und legt eine Regressionskurve mit dem nach [Cha 61] erwartete Anwachsen $A(t) \propto \sinh(nt)$ durch die numerischen Meßpunkte, so ergibt sich für Fig. III.6: $n=1.46$. Dies bedeutet, daß der durch die Kelvin Helmholtz-Instabilität erzeugte höhere Strömungswiderstand die Wachstumsrate um ca. 33% verringert hat. Dies wird auch von anderen Autoren bestätigt [Ver 82].

Das Verdoppeln der Wellenzahl sollte zu einem Anwachsen von n um das $\sqrt{2}$ -fache führen (s. Gleichung III.16). In unserer Rechnung ist $n_{k=2}=1.85$ und zeigt damit bis auf 10% das erwartete Verhalten. Die geringe Abweichung kann z.B. an der Ausbildung der zweiten Kelvin Helmholtz-Instabilität in der Spikemitte oder dem veränderten Größenverhältnis spike/spike-Kopf liegen. Somit läßt sich bereits jetzt der Schluß ziehen, daß die lineare Näherung in Gleichung (III.16) die Realität nur annähernd beschreibt, und daß insbesondere Sekundäreffekte, wie sie oben beschrieben wurden, sich dämpfend auf die Wachstumsraten auswirken.

Unser Modell erlaubt auch, Überlagerungen von Störungen zu betrachten.

In Fig. III.8 wurden die Störungen mit $\lambda=0.8$ und $\lambda=0.4$ mm überlagert. Es entstehen zwei spikes, deren Köpfe sich im nichtlinearen Stadium stark verdünnen. Durch diese starke Ausdünnung sowie durch die ausgeprägten Kelvin Helmholtz-Instabilitäten an den Spitzen bleiben die beobachteten Wachstumsraten mit $n=1.7$ bzw. $n=1.42$ für den linken/rechten spike noch unter den Raten der einzelnen monofrequenten Störungen. Überlagerungen scheinen daher nicht besonders kritisch zu sein.

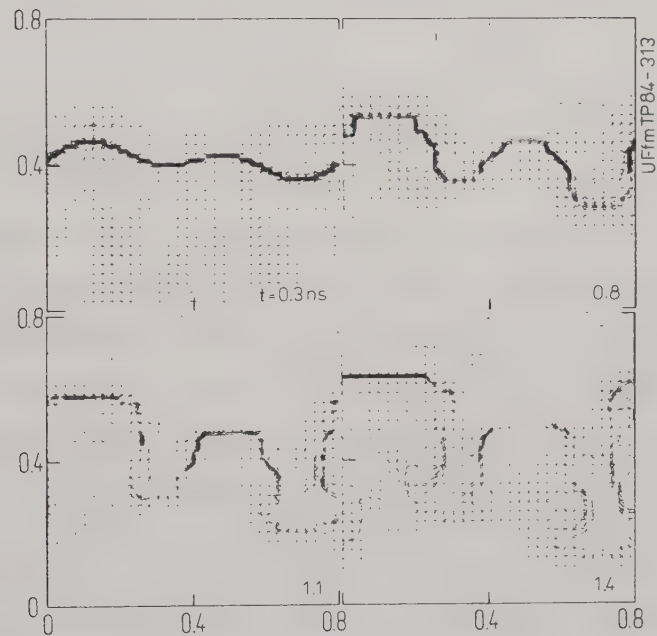


Fig. III.8

III.2.3.2 STUDIEN AN GESTÖRTEN FOLIEN

Nach diesen grundlegenden Betrachtungen wenden wir uns nunmehr dem eigentlichen Problem zu, nämlich der Stabilitätsuntersuchung an einer gestörten Folie, die eine gute Näherung für die Schale einer Hohlkugel darstellt.

Die Folie repräsentiert eine der Materialschichten im Pellet, und es soll nun das systematische Verhalten einer solchen beschleunigten Folie/Schale bei einer gestörten Trennschicht untersucht werden.

Bei Schichten mit endlicher Dicke sind für das Wachstum einer Rayleigh-Taylor Instabilität zwei Größen maßgeblich: Das Verhältnis Störungsamplitude zu Störungswellenlänge A/λ und das Verhältnis Störungsamplitude zu Schichtdicke $A/\Delta x$ [Suy 78, Ver 82]. Diese beiden Parameter sollen in den folgenden Betrachtungen ebenso wie Atwood-Zahl und Viskosität variiert werden. Da es sich bei A/λ und $A/\Delta x$ um dimensionslose Größen handelt, kann man davon ausgehen, daß die gefundenen Zusammenhänge für alle Absolutwerte von Dichte und Beschleunigung gelten. [Lan 66].

III.2.3.2.1 ZEITLICHE ENTWICKLUNG

In der Regel wird eine typische Unregelmäßigkeit in einer der Pelletschichten nicht ideal sinusförmig sein. Vielmehr wird die Störung in den meisten Fällen durch ein Korn auf der Treppfläche oder durch eine Einbuchtung entstehen.

Bei den folgenden Interpretationen werden deshalb die typischen Störungen in einer Pelletschicht durch jeweils nur eine (die obere oder die untere) Benetzungswelle simuliert. Dabei sollte die in der dünneren Medium einen gerichtete Störung (Korn) entsprechend den bisher gemachten Betrachtungen die kräftigeren Anwachsrate haben.

Fig. III.9 zeigt die typische Entwicklung einer Kornstörung bei einer 0,1 mm dicken Folie ($At=0,6$).

Der Grad der Schwärzung in Fig. III.9 ist der Dichte proportional. Allerdings wurde zu jedem Zeitpunkt neu exallert. Das prinzipielle Verhalten ist ähnlich, wie bei den Figuren III.8 und III.7. Es überrascht jedoch, daß nach 1 0% nur rechts und links vom spike deutlich ausgeprägte Blasen entstehen, die schnell anwachsen und nach ca. 2 ns zum Zerbrechen der Folie führen. Diese Blasen entstehen durch die bereits oben beschriebenen Wirbel, die sich sofort an den Rändern der Störung entwickeln. So wird nun dicke Materie in der spike und dünne Materie in die dadurch entstehende Lucke (Blase) transportiert. Diese Wirbel erinnern an die sogenannten "An-

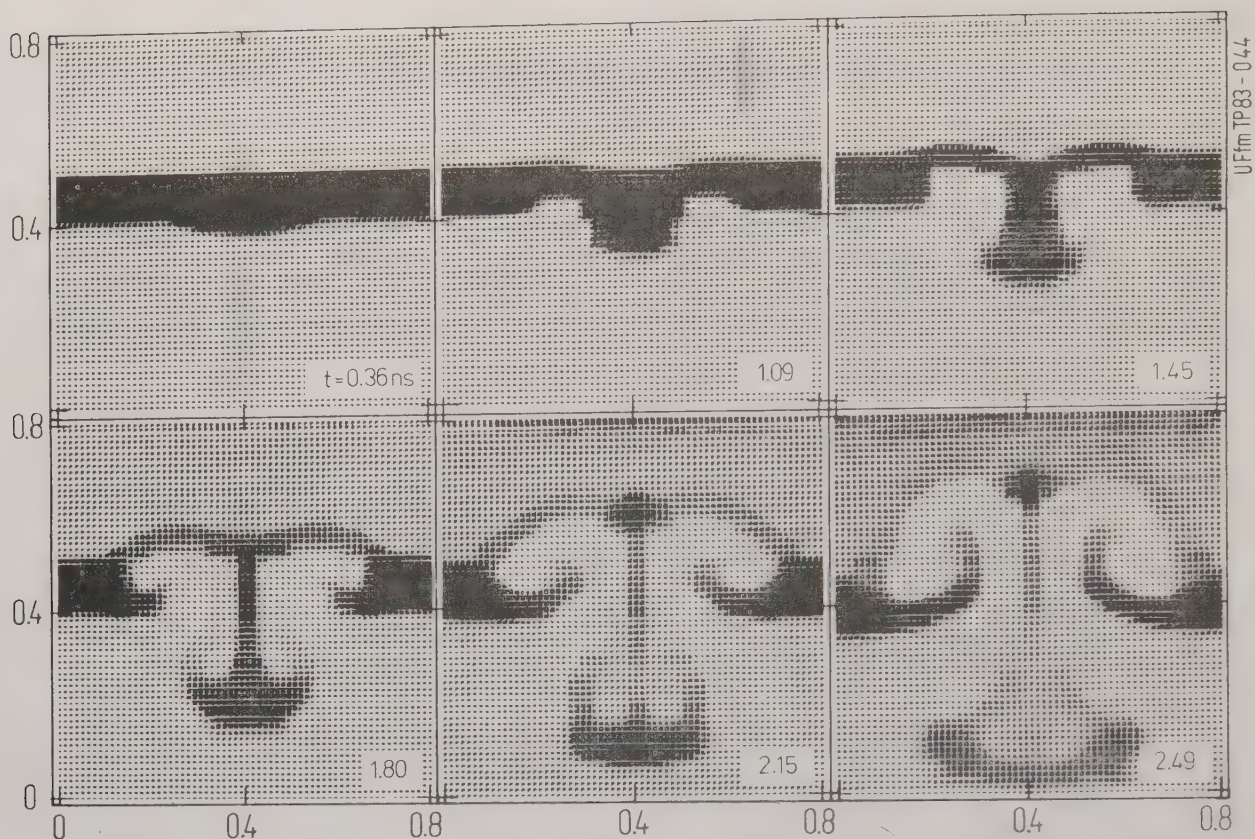


Fig. III.9

fahrwirbel", wie sie an den Rändern der Tragflächen bei startenden Flugzeugen erzeugt werden.

Nach ca. 1.4 ns ist der Beginn der nichtlinearen Phase deutlich zu erkennen: Der spike-Kopf wird durch die sich ausbildende Kelvin Helmholtz-Instabilität breiter als der Rumpf. Diese Entwicklung setzt sich fort, und nach 1.8 ns hat sich eine Form ausgebildet, die stark an einen "Atompilz" erinnert, wie er bei der Zündung einer

Spaltbombe auftritt. Auch dort strömen zwei Medien mit unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander vorbei, und das dichtere wird vom dünneren Medium beschleunigt.

Die Folie ist jetzt im Gebiet der Instabilität nur noch sehr dünn. Man erkennt deutlich, daß in dieser Zone eine geringere Dichte herrscht als in der restlichen Folie. Ab ca. 2 ns nach Einsetzen des spike-Wachstums kann man nicht mehr von einer zusammenhängenden Folie sprechen. Auch der Rumpf des spikes hat sich an einigen Stellen so stark ausgedünnt, daß der Kopf nach ca. 2 ns abreißt und frei nach unten fällt, bis er schließlich auf den Boden unseres numerischen Gitters prallt.

Fig. III.10 zeigt die zeitliche Entwicklung der Spikelänge. Die Spikelänge wurde hier als maximale vertikale Ausdehnung einer gegebenen Konturlinie definiert. Typischerweise wurde also vom unteren Rand der Blase bis zum spike-Kopf gemessen. Die Wahl der entsprechenden Konturlinie hatte dabei bis auf ca. 3% in der Wachstumsrate keinen Einfluß auf die Ergebnisse.

Die durchgezogene Kurve in Fig. III.10 zeigt das Resultat unserer numerischen Integration. Die gestrichelte Linie stellt das Resultat eines fits an das in linearer Näherung erwartete Resultat dar. Dabei wurden solange Punkte aus der Rechnung berücksichtigt, bis die aus der Regressionsrechnung ermittelten Wachstumsraten n zu divergieren begannen. Somit läßt sich ein Zeitpunkt für das Abweichen des Systems von der linearen Näherung angeben. In diesem Beispiel tritt die Abweichung nach 1.8 ns auf.

Wir wollen nun die Entwicklung einer Störung in Form einer Einbuchtung in die Folie untersuchen. Dazu wurde an die gleiche Stel-

Growth of a RTI

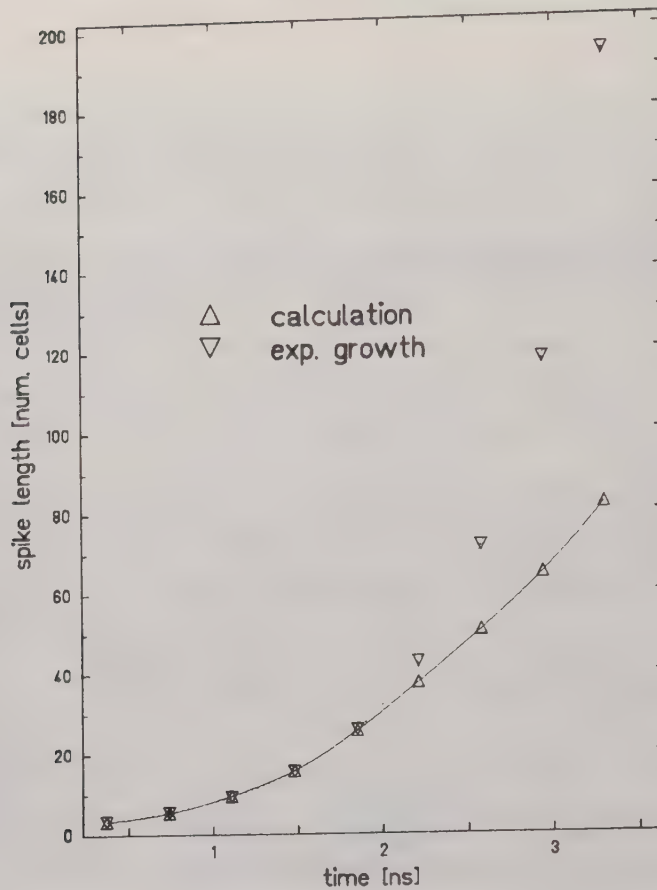


Fig. III.10

le wie zuvor die obere Halbwelle einer Sinusstörung gesetzt (Fig. III.11).

Die so entstandene Blase wächst sowohl in vertikaler, als auch in horizontaler Richtung. Allerdings ist das Verhalten dieser Instabilität gänzlich verschieden von dem einer Kornstörung. Auch die Wachstumsrate ist geringer als bei einer Kornstörung. Nach 1.48 ns ist die Folie bereits stark deformiert. An den unteren Rändern der Blase beginnen sich zwei spikes zu entwickeln, die schräg aufeinander zu laufen. Es scheint, als würde dieser Effekt nach mehr als

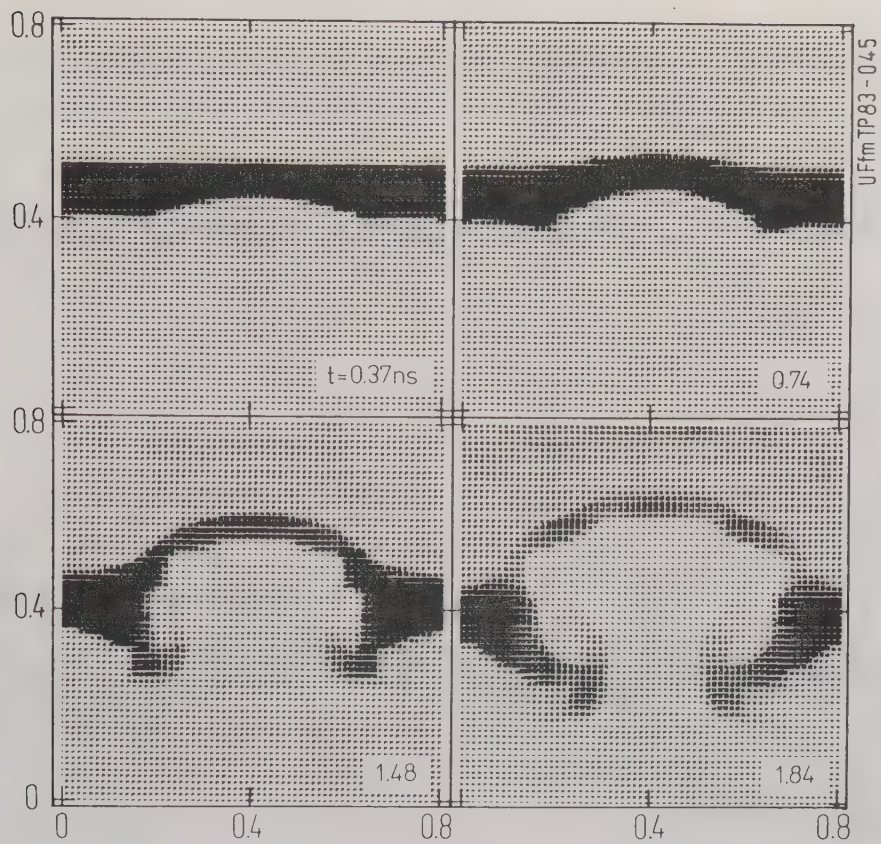


Fig. III.11

1.8 ns zu einem Verschließen der Bruchstelle führen. Man kann sich jedoch leicht vorstellen, daß die jetzt schon stark abgefallene Dichte in der Folie sowie die Dynamik an der Störstelle nie mehr eine intakte Folie zustande kommen lassen. Obwohl die Störung durch eine Einbuchtung interessante und von einer Kornstörung prinzipiell verschiedene Effekte aufweist, wollen wir uns im Folgenden auf die Untersuchung von Kornstörung beschränken. Dies nicht zuletzt wegen der größeren Wachstumsrate bei Kornstörungen.

Es soll hier noch bemerkt werden, daß eine reine Sinusstörung in der Trennschicht eine von den Figuren III.9 und III.11 gänzlich verschiedene Entwicklung aufweist.

In Fig. III.12 sehen wir, daß insbesondere der spike bei einer reinen Sinusstörung wesentlich dicker ist, als bei einer Kornstörung. In der bubble fehlen die in Fig. III.11 beobachteten nach unten gerichteten Spitzen, die das Einströmen von dünner Materie in die Blase

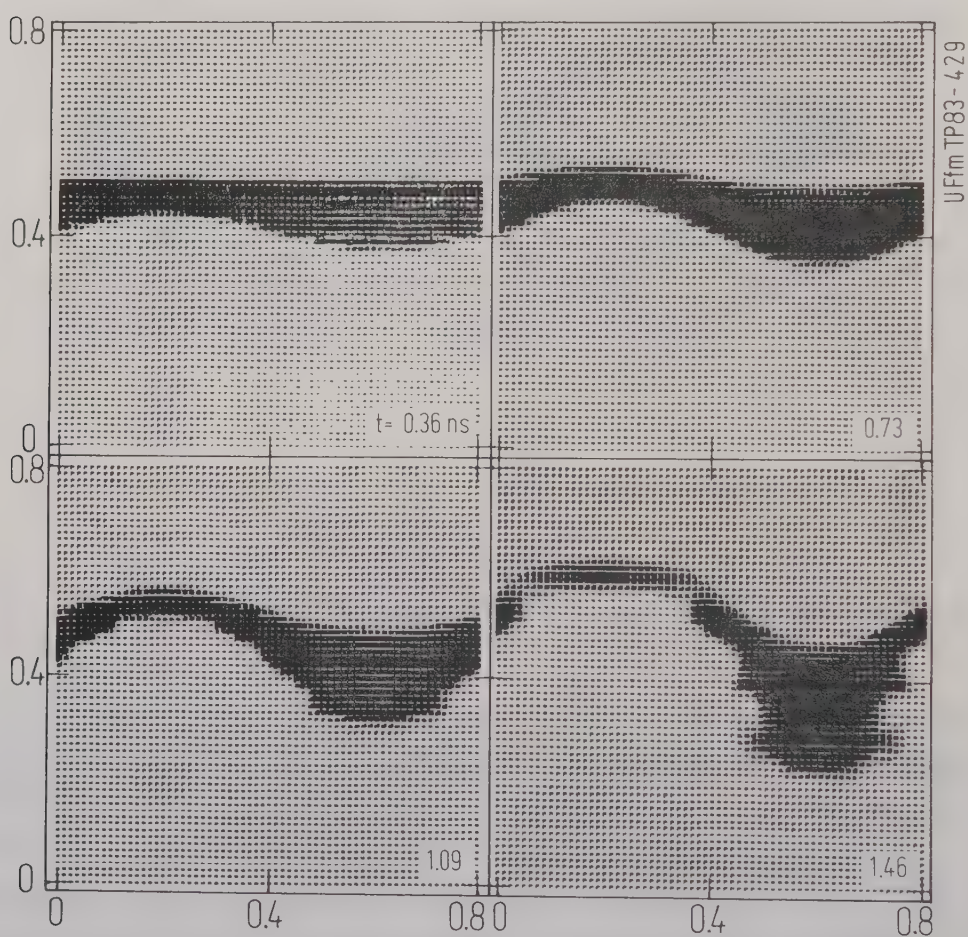


Fig. III.12

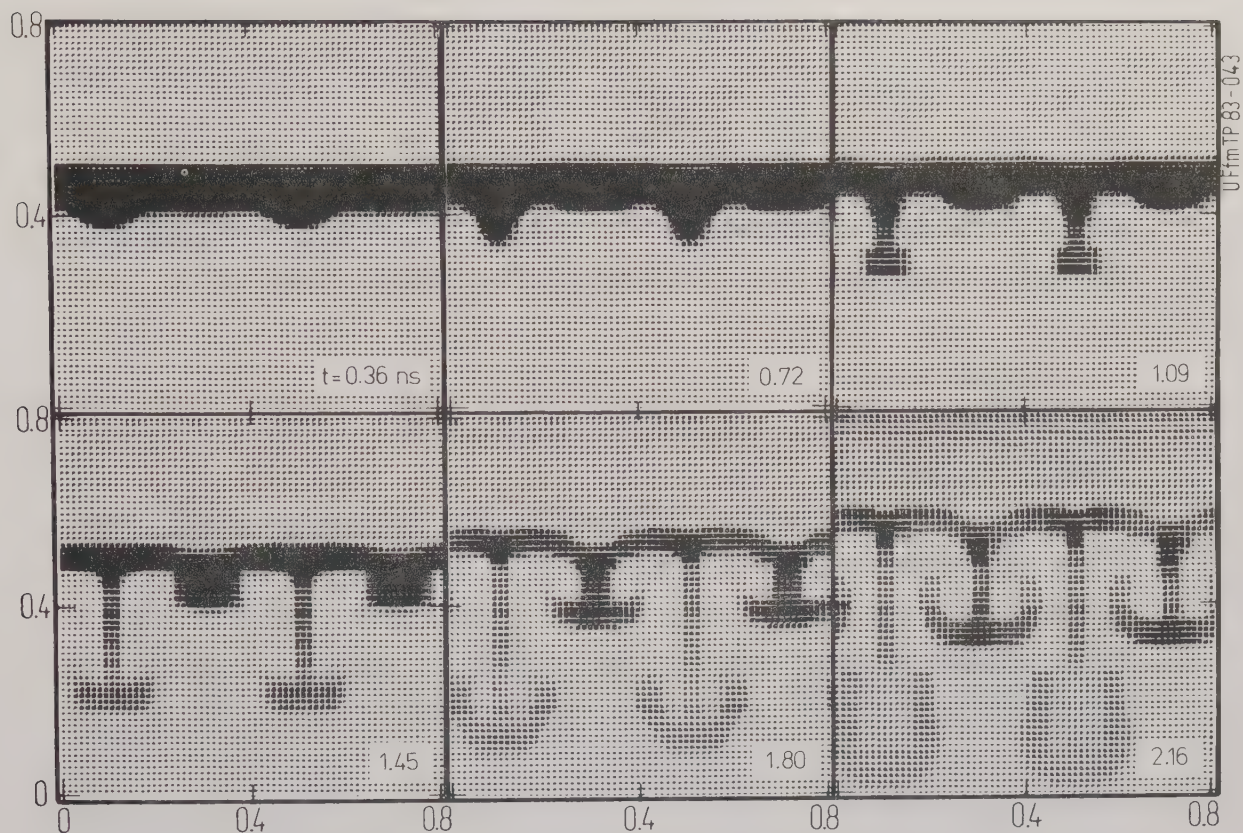


Fig. III.13

beeinflussen. Insgesamt scheint daher eine reine Sinusstörung durchaus nicht repräsentativ für das große Spektrum aller möglichen Störungen zu sein.

Wir interessieren uns jetzt dafür, inwieweit Rayleigh-Taylor Instabilitäten miteinander wechselwirken können. Dies sollte dann der Fall sein, wenn die räumliche Entfernung zweier Störungen höchstens in der Größenordnung einer typischen Störungswellenlänge liegt.

Fig. III.13 zeigt die zeitliche Entwicklung einer solchen Konfiguration. Die beiden Kornstörungen liegen genau eine Wellenlänge ($\lambda=0.4\text{ mm}$) voneinander entfernt. Im Prinzip können die im Folgenden diskutierten Effekte wegen der in Horizontalrichtung periodischen Randbedingungen bereits in Figur III.9 beobachtet werden. In Figur III.13 treten sie jedoch wesentlich deutlicher hervor:

Zunächst entwickelt sich das System in der gewohnten Weise. Nach ca. 1 ns haben sich zwei deutliche spikes mit den jeweils zugehörigen bubbles ausgebildet. Dadurch bleibt nur noch eine etwa 2 mm breite Zone der Folie ungestört. Gegenüber den Nachbargebieten haben diese eigentlich ungestörten Zonen jedoch das Aussehen einer neuen, zusätzlichen Störung. Entsprechend entwickelt sich ein neues spike-bubble-System, das nun seinerseits zu wachsen beginnt. Die Wachstumsrate dieser zweiten RTI-Generation ist rund 10% größer ($n=2.5$) als die der ersten Störung ($n=2.3$), obwohl die Kelvin-Helmholtz-Instabilität in der zweiten Generation stärker ausgeprägt ist: So ist nach 1.8 ns die Pilzform bei der 2. Generation noch deutlicher als im entsprechenden Entwicklungsstadium (ca. nach 1.1 ns) bei der primären Rayleigh-Taylor Instabilität.

Die bereits existierende Aufwärtsströmung vergrößert die Relativgeschwindigkeiten von dichter und dünner Materie und führt so zu einer Verstärkung der Wirbel. Weiterhin überlagern sich die bubbles der 1. und der 2. Generation. Es addieren sich auch hier die Störungen, was eine sehr rasche räumliche Ausdünnung der Folie zur Folge hat. Die Folie zerbricht nach ca. 2 ns. Durch das sehr schnelle bubble-Wachstum scheint die Folie verblüffenderweise entgegen der Gravitation beschleunigt worden zu sein. Die Wachstumsraten sind jedoch auch hier bis auf 10% in der Größe, wie sie für die reinen Moden erwartet werden.

Dieser erstmals entdeckte Effekt kann bei kritischen Konfigurationen besonders starke Wachstumsraten haben. Trotzdem wollen wir im Folgenden das Wachstum einer einzelnen Störung systematisch untersuchen und die Abhängigkeit von verschiedenen Parametern studieren.

III.2.3.2.2 KRITISCHE SCHICHTDICKEN

Zunächst interessieren wir uns für die Abhängigkeit der Wachstumsraten von der Foliendicke. In einer Studie von Suydam [Suy 78] werden kritische Wellenlängen für eine nichtviskose, inkompressible Flüssigkeitsschicht analytisch abgeschätzt. Die Flüssigkeitsschicht ist wie bei unseren Rechnungen einem Gravitationsfeld ausgesetzt.

Die Zeit, die bis zum Zerschneiden der Folie vergeht, setzt sich nach Suydam aus einem Beitrag t_1 von der Phase mit rein exponentiellem Wachstum und einem Beitrag t_2 von der sog. asymptotischen Phase zusammen, in der die Spike mit konstanter Beschleunigung wächst.

$$t_b = t_1 + t_2$$

(III.26)

Während Suydam eine klare Trennung dieser beiden Phasen (mit vernachlässigtem Zwischenstadium) annimmt, dürfte in unserem Fall

eher eine Überlagerung vorliegen. Trotzdem sind die Ergebnisse, wie wir sehen werden, durchaus miteinander vergleichbar. Nimmt man für Phase 1 ein exponentielles Wachstum der Anfangsstörung ξ_0 an ($Ad=1.$),

$$\xi = \xi_0 e^{nt}, \quad n = \sqrt{2\pi g/\lambda} \quad (III.27)$$

so ergeben sich für Geschwindigkeit und Beschleunigung der Störung in Phase 1:

$$\xi_1' = n \xi_0 e^{nt_1} = \sqrt{2\pi g/\lambda} \xi_0 e^{nt_1} \quad (III.28)$$

beziehungsweise

$$\xi_1'' = n^2 \xi_0 e^{nt_1} = 2\pi g/\lambda \xi_0 e^{nt_1} \quad (III.29)$$

Die Beschleunigung muß zu Beginn der Phase 2 (also nach der Zeit t_1) gleich dem asymptotischen Wert g sein. Gleichung (III.29) ergibt deshalb:

$$\xi_0 e^{nt_1} = \lambda/(2\pi) \quad \text{und damit}$$

$$t_1 = \sqrt{\lambda/(2\pi g)} \log[\lambda/(2\pi \xi_0)] \quad (III.30)$$

Aus Gleichung (III.28) erhalten wir analog:

$$\xi_1' \equiv v_1 = \sqrt{g\lambda/(2\pi)} \approx 0.4\sqrt{g\lambda}. \quad (\text{III.31})$$

Hat die Folie eine endliche Dicke Δ , so verbleibt nach der Zeit t_1 noch $\Delta - \lambda/2\pi$ ungestörte Folie (vgl. Gl. III.30). Demnach verbleibt für die zweite Phase eine Zeit

$$t_2 = [\Delta - \lambda/(2\pi)] \sqrt{2\pi/(\lambda g)}. \quad (\text{III.32})$$

Die Gesamtzeit bis zum Durchbruch ist nach (III.26):

$$t_b = \sqrt{\Delta/g} \{ 1/x + x [2\log x - 1 + \log(\Delta/\xi_0)] \} \quad (\text{III.33})$$

mit

$$x \equiv \sqrt{\lambda/(2\pi\Delta)}. \quad (\text{III.34})$$

Durch Ermittlung des Extremalwertes von t_b

$$\partial_x t_b = 0 \quad (\text{III.35})$$

ergibt sich ein kritisches $x = x_M$ zu:

$$(1/x_M)^2 = 1 + \log(\Delta/\xi) + \log(x_M)^2 \quad (\text{III.36})$$

Für Störungen, deren Anfangsamplituden wesentlich kleiner sind als die Schichtdicke ($\Delta/\xi \approx 10^3$), liegt die kritische Wellenlänge in der Größenordnung der Schichtdicke [Suy 78]. In unserem Fall ist Δ/ξ mit $4 < \Delta/\xi < 40$ jedoch wesentlich kleiner. Da bei unseren Rechnungen die Störung konstant gehalten werden soll, während die Schichtdicke variiert wird, schreiben wir (III.36) mit Hilfe von (III.34) um zu:

$$\Delta_M = \lambda / 2\pi (1 + \log(\lambda / 2\pi\xi)) \quad (III.37)$$

Für unsere Parameter $\lambda = 0.8$ mm und $\xi = 0.025$ mm ergibt sich nach Suydam eine maximale Wachstumsrate bei einer Schichtdicke von $\Delta_M = 0.33$ mm.

Wir wollen nun das Resultat dieses einfachen analytischen Modells mit unseren numerischen Studien vergleichen.

Fig. III.14 zeigt die Wachstumsraten einer Rayleigh-Taylor Instabilität für verschiedene Schichtdicken und für Atwood-Zahlen von $At = 0.33, 0.6$ und 0.82 . Alle drei Kurven haben ein Maximum bei $\Delta \approx 0.3$ mm. Für größere Schichtdicken werden die Wachstumsraten konstant, während bei kleineren Schichtdicken die geringe Ausdehnung des Systems die Wachstumsrate sinken läßt. Insbesondere dürfte die Entwicklung der bubble durch die geringe Foliendicke maßgeblich beeinträchtigt werden. Weiterhin kann wegen des geringen Querschnitts einer dünnen Folie nur wenig dichte Materie in den spike nachfließen.

Die Wachstumsraten an den Maxima von Fig. III.14 liegen nur etwa 10% über dem Durchschnitt. Das Anwachsen der Störung wird bei der "kritischen" Schichtdicke also nicht bedenklich. Das Maximum ist mit

abnehmender Atwood-Zahl schwächer ausgeprägt. Offenbar ist jedoch die kritische Schichtdicke nicht von der Atwood-Zahl abhängig.

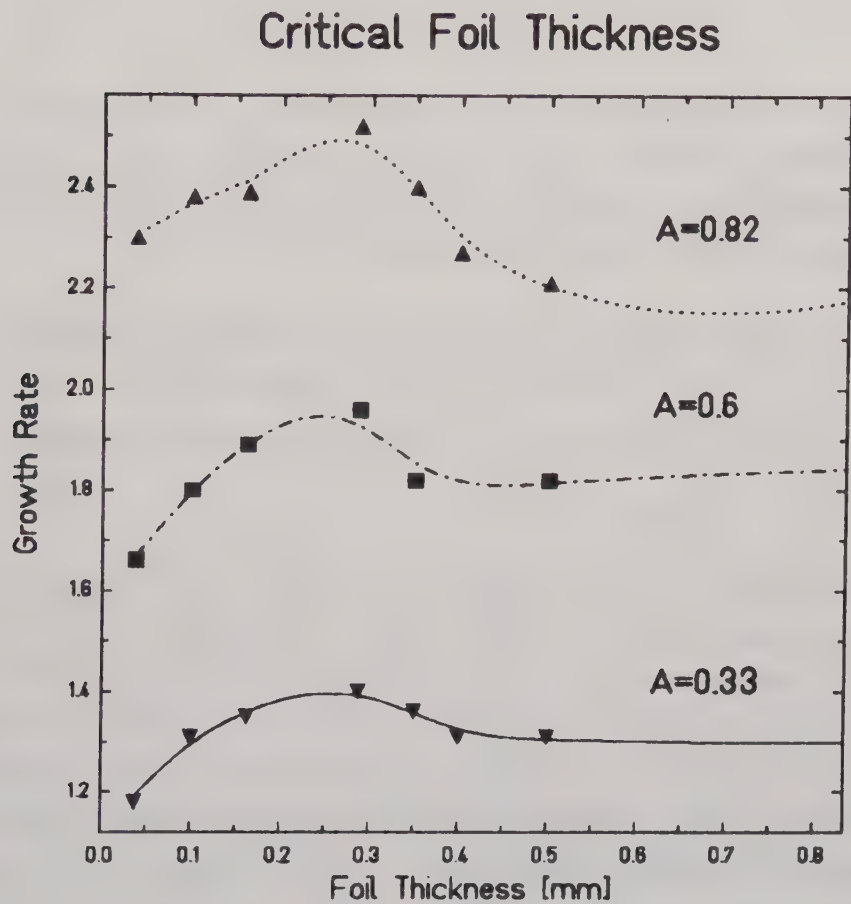


Fig. III.14

III.2.3.2.3 ABHÄNGIGKEIT VON DER ATWOOD-ZAHL

Das zeitliche Verhalten einer Rayleigh-Taylor Instabilität wird von der Atwood-Zahl deutlich beeinflußt. Fig. III.15a zeigt die Entwicklung bei der kritischen Schichtdicke $\Delta \approx 0.3$ mm.

Die durchgezogenen Kurven entsprechen den numerischen Ergebnissen bei (von oben nach unten) $At=0.82$, 0.6 und 0.33 , die gestrichelten Linien sind Fits mit $A \propto \sinh(nt)$, die nach dem oben geschilderten Verfahren gewonnen wurden.

Für große Atwood-Zahlen ($At=0.82$) weicht das System bereits nach $t_a \approx 1.2$ ns von der linearen Näherung ab. Bei kleinen Atwood-Zahlen ($At=0.3$) ist t_a dagegen um rund 50% größer (s. Fig. III.16).

Man könnte nun annehmen, daß aufgrund des länger anhaltenden exponentiellen Wachstums bei kleinen Atwood-Zahlen trotz der geringeren Wachstumsrate das kritischere Verhalten auftritt. Fig. III.15b zeigt jedoch, daß dies nicht der Fall ist. Auch im nichlinearen Bereich wachsen Störungen für große Atwood-Zahl immer noch am schnellsten. Die numerisch ermittelten Wachstumsraten zeigen im Wesentlichen die gleiche Abhängigkeit von der Atwood-Zahl, wie es vom linearen Modell vorhergesagt wird. Fig. III.17 zeigt die maximalen Wachstumsraten aus unseren Studien für verschiedene Atwood-Zahlen. Die Werte reproduzieren das Verhalten der Wachstumsrate $n \propto \sqrt{At}$ in guter Näherung (gestrichelte Kurve).

Bei der spike-Form ergeben unsere Studien das gleiche Verhalten, wie bereits in Figur III.3 beobachtet wurde: Mit zunehmender Atwood-Zahl wird die Kelvin Helmholtz-Instabilität immer schwächer ausgeprägt, und bei $At \rightarrow 1$ tritt keine Kelvin Helmholtz-Instabilität mehr auf. Dann existiert nämlich keine dünnere Flüssigkeit mehr, die der dichteren entgegen strömen könnte.

Auch für Folien wurden die Auswirkungen von Störungsüberlagerungen untersucht. Selbst bei der kritischen Schichtdicke von $\Delta = 0.33$ mm ergab sich keine größere Wachstumsrate,

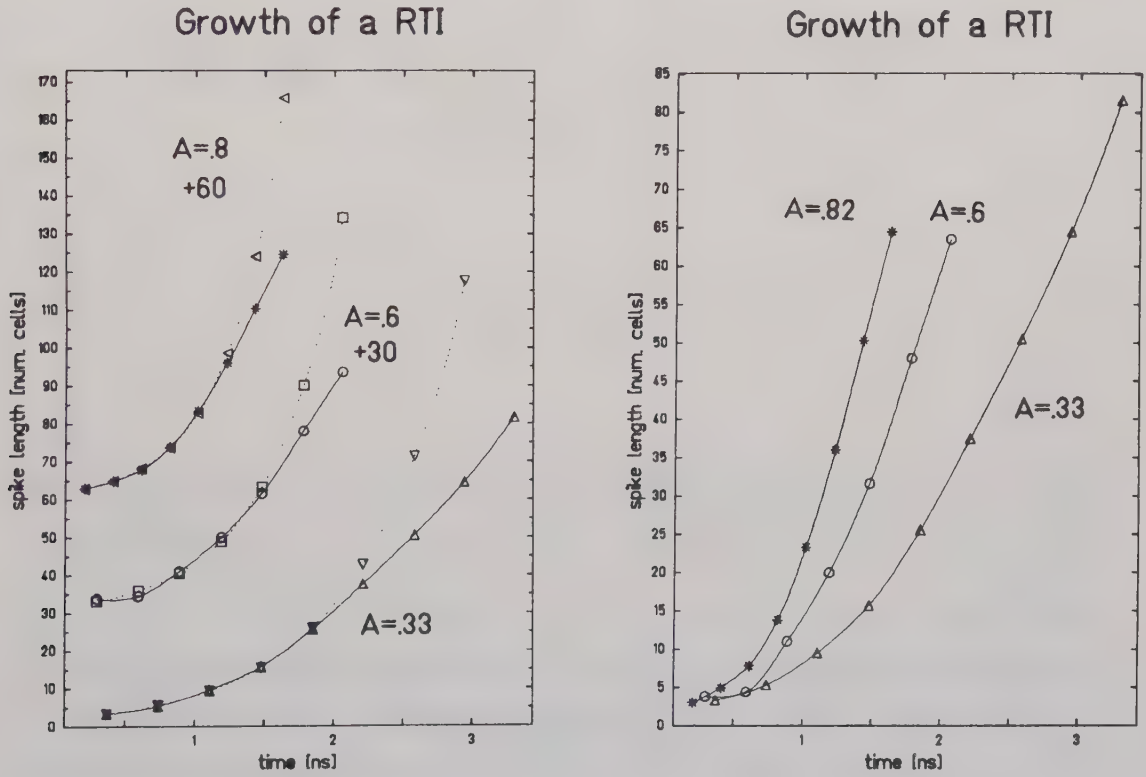


Fig. III.15

Onset of nonlinear Growth

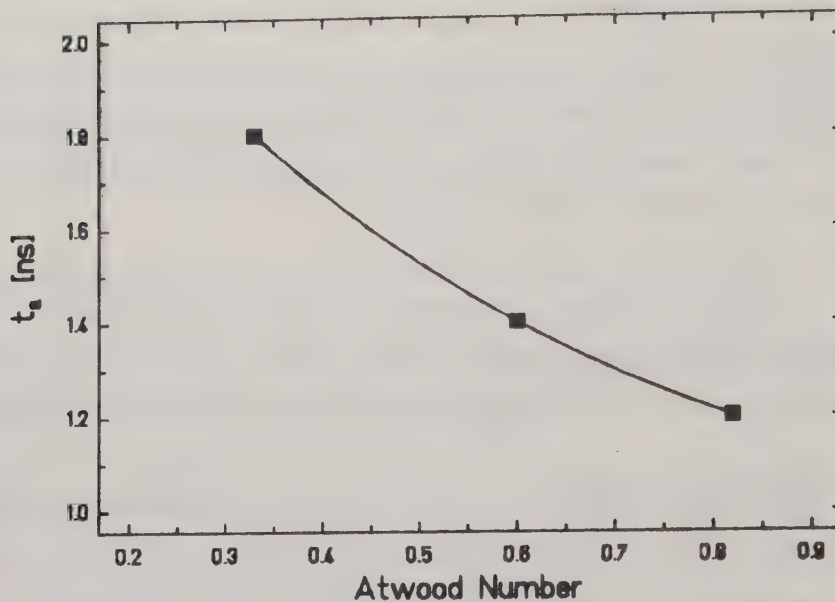


Fig. III.16

als für die jeweilige Einzelstörungen. Wir wollen uns deshalb weiterhin nur für die Entwicklung einer einzelnen Kornstörung interessieren. In [Suy 78, Fra 74, Mas 75, Tay 50, Cha 61, McC 81, McC 77] wird ausgeführt, daß bei der Diskussion von Wachstumsraten RT-instabiler Folien zwei Parameter wichtig sind: Die Quotienten Störungsamplitude / Wellenlänge (A/λ) und Störungsamplitude / Schichtdicke (A/Δ). Fig. III.18 zeigt eine systematische Untersuchung der Wachstumsraten in Abhängigkeit dieser beiden Parameter.

Die Wachstumsrate in Abhängigkeit von A/Δ sind für verschiedene Atwood-Zahlen in Fig. III.18a aufgetragen. In allen Fällen ergibt sich ein Maximum bei $A/\Delta \approx 0.087$. Wie bei Fig. III.14 sind diese Maxima jedoch nicht sehr stark ausgeprägt. Fig. III.18b zeigt die Abhängigkeit der Wachstumsrate von A/λ (bei $At=0.6$). Die gepunktete Linie wurde bei $A/\Delta=0.9$ gerechnet, wo sich in Fig. III.18a das stärkste Wachstum ergab. Das Maximum in Fig. III.18b ist dabei vor allem gegenüber großen A/λ sehr stark ausgeprägt. Bei gegebener Amplitude scheint also die Wellenlänge der Störung einen größeren Einfluß auf

Maximum Growth Rates

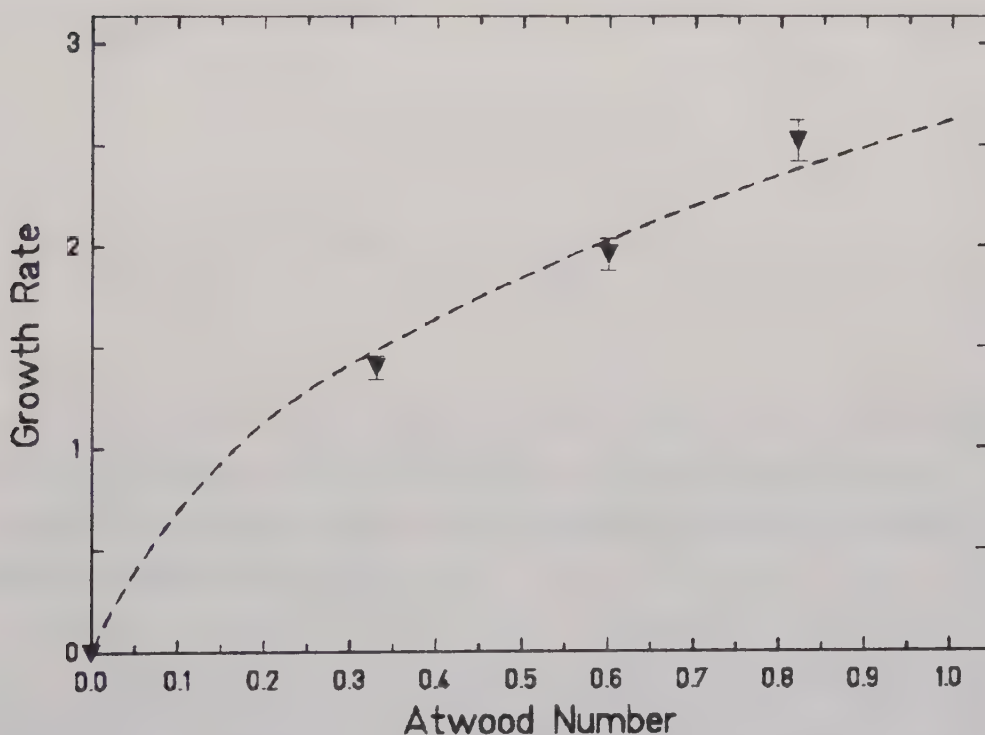
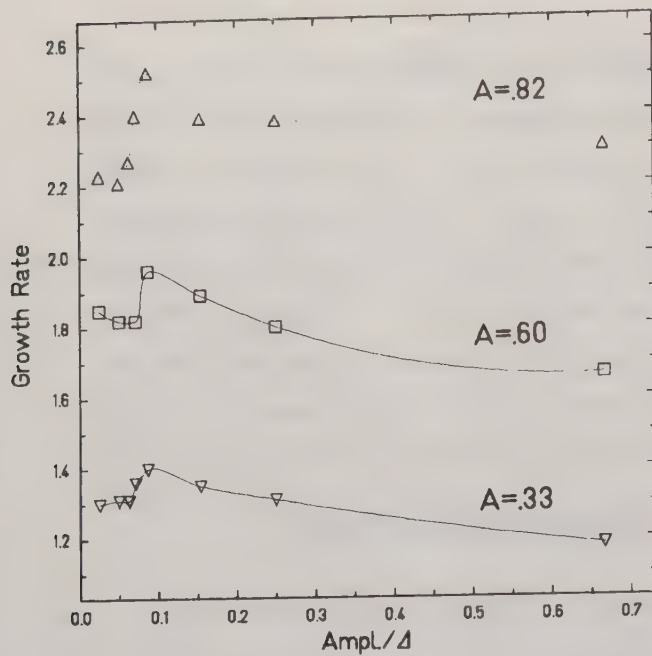


Fig. III.17

Growth Rate for $\text{Ampl.}/\lambda = \text{const.}$



Growth Rate for $\text{Ampl.}/dx = \text{const.}, A=60$

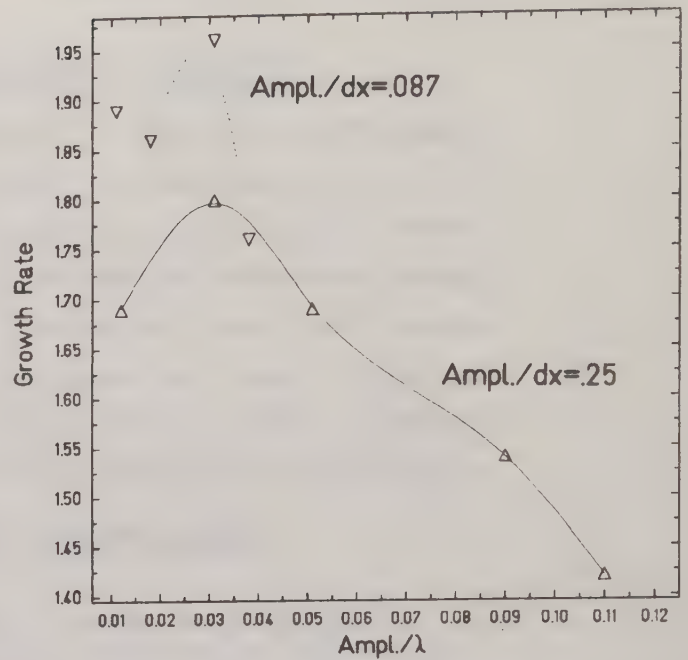


Fig. III.18

die Wachstumsrate zu haben, als die Schichtdicke der Folie. Dies liegt daran, daß ein spike mit kleiner Wellenlänge bei vergleichsweise großer Amplitude bereits im Anfangsstadium typische RT-Gestalt hat und deshalb schon früh abreißt und "frei" durch das leichtere Medium fällt. Bei der durchgezogenen Linie in Fig. III.18b ist das Verhältnis A/Δ mit 0.25 wesentlich größer. Trotzdem tritt das Maximum an der gleichen Stelle auf. Der Abfall zu größeren A/λ ist jedoch wesentlich schwächer, als für $A/\Delta=0.9$. Hier haben große Amplituden mit kleinen Wellenlängen einen stärkeren Einfluß.

III.2.3.3 BEEINFLUSSUNG DER WACHSTUMSRATEN

Es sollen nun die Möglichkeiten untersucht werden, die Wachstumsrate für eine vorgegebene Konfiguration (At , A/Δ , A/λ) herabzusetzen. Dafür kommen verschiedene Maßnahmen in Frage wie Ausschmieren der Trennschicht oder Vergrößern der Viskosität.

Wir wollen zunächst die Auswirkungen untersuchen, die ein Ausschmieren der Trennschicht zwischen den Flüssigkeiten mit sich bringt.

III.2.3.3.1 AUSSCHMIEREN DER TRENNSCHICHT

Betrachtet man infinitissimale Abschnitte dx der Trennschicht, so entspricht ein Verschmieren der Trennschicht (Fig. III.19) einer Sequenz von Trennschichten mit kleinen Atwood-Zahlen At_i . Diese Atwood-Zahlen sind einzeln natürlich wesentlich kleiner, als das At einer scharfen Trennschicht.

Mit $n \propto \sqrt{At}$ aus der linearen Näherung besteht nun die Hoffnung, daß sich die At_i zu einer effektiven Atwood-Zahl $At_{eff.} < At$ zusammensetzen und so zu einem geringeren Wachstum der Störung führen.

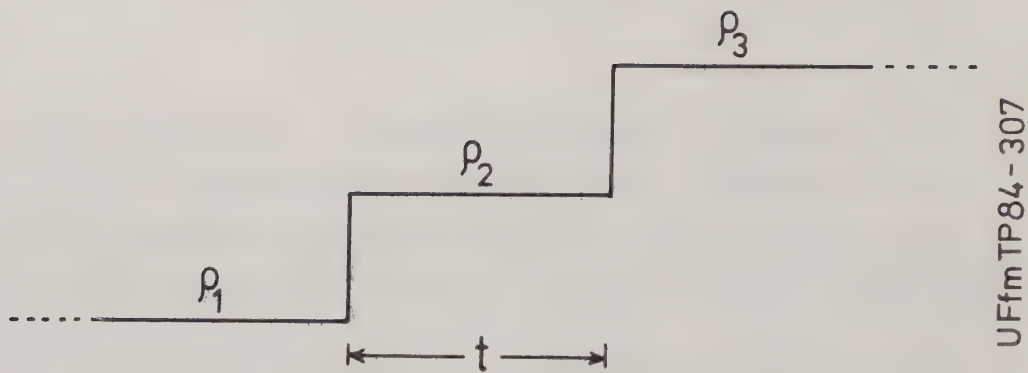


Fig. III.19

Wird die Dicke dieser Trennschichten immer kleiner, so daß schließlich $t_i \rightarrow 0$, so entsteht ein kontinuierliches Dichteprofil $\rho(y)$ für $0 < y < t$.

Wir wollen zunächst eine analytische Beschreibung für das Verhalten von Rayleigh-Taylor Instabilitäten bei endlich dicken Dichteprofilen diskutieren [Cha 61, Mik 82, 82a, Kul 82]. Danach wollen wir unsere numerischen Ergebnisse mit den analytischen Lösungen vergleichen.

Dazu betrachten wir das zweidimensionale Problem einer kleinen Dichtestörung.

$$\delta\rho(x,y,\tau) = \delta\rho(y)e^{ikx+\gamma\tau} \quad (III.38)$$

In erster Ordnung in $\delta\rho$ lassen sich die hydrodynamischen Gleichungen (III.19 - III.21) zusammenfassen zu [Cha 61]

$$D(\rho DW) + gk^2/n^2WD\rho - k^2\rho W = 0 \quad (III.39)$$

$W(y)$ beschreibt dabei die Geschwindigkeit der gestörten Flüssigkeit in y -Richtung:

$$v_y(x,y,\tau) = W(y)e^{ikx+\gamma\tau} \quad (III.40)$$

und D ist der Operator d/dy .

Ein Fall, der sich noch analytisch untersuchen läßt, ist das Beispiel mehrerer übereinander liegender Schichten mit unterschiedlichen Dichten [Mik 82,82a]:

An einer unendlich dünnen Trennschicht erhalten wir durch Integration von Gleichung (III.39) die Sprungbedingung

$$\Delta(\rho DW) + gk^2/n^2W\Delta(\rho) = 0 \quad , \quad (III.41)$$

wobei $\Delta(f) = f_+ - f_-$ ist und $f_+(-)$ einen Wert über (unter) der Trennschicht bedeutet.

Der Einfachheit halber soll das Beispiel dreier Flüssigkeiten untersucht werden (Fig. III.19), wobei die mittlere Schicht eine Dicke t haben soll [Mik 82,82a].

Innerhalb jeder der drei Dichteregionen reduziert sich Gleichung (III.39) zu $(D^2 - k^2)W = 0$, bzw. $W \propto e^{\pm ky}$. In der Mittelschicht ist W eine Linearkombination aus beiden Lösungen, und für die untere (obere) Schicht gilt $W \propto e^{+(-)ky}$, da W in der $+\infty$ und $-\infty$ -Richtung verschwinden soll.

Wir wollen im Folgenden die untere, mittlere und obere Schicht mit 1, 2 und 3 bezeichnen. Für die drei Regionen legen wir fest:

- Region 1:

$$y \leq 0, \quad \rho = \rho_1, \quad W = W(0)e^{ky}$$

- Region 2:

$$0 < y < t, \quad \rho = \rho_2, \quad W = Ae^{ky} + Be^{-ky}$$

- Region 3:

$$y \geq t, \quad \rho = \rho_3, \quad W = W(t)e^{-k(y-t)}$$

Aufgrund der Stetigkeit von W bei $y=0$ und $y=t$ erhalten wir:

$$A = [W(t) - W(0)e^{-kt}] / (e^{kt} - e^{-kt}),$$

$$B = [W(0)e^{kt} - W(t)] / (e^{kt} - e^{-kt}).$$

(III.42)

Die Sprungbedingung (III.41) ergibt an der ersten Trennschicht

$$n^2/gk = (\rho_2 - \rho_1) / [\rho_2 \{T + (W(0) - W(t))/W(0)S\} + \rho_1] \quad (\text{III.43})$$

und an der zweiten Trennschicht erhalten wir:

$$n^2/gk = (\rho_3 - \rho_2) / [\rho_2 \{T + (W(t) - W(0))/W(t)S\} + \rho_3] \quad (\text{III.44})$$

mit $T \equiv \tanh(\frac{1}{2}kt)$ und $S \equiv \sinh(kt)$. Eliminieren wir $W(t)/W(0)$ aus diesen beiden Gleichungen, so ergibt sich eine quadratische Gleichung für $\chi \equiv n^2/gk$:

$$a\chi^2 + b\chi + c = 0 \quad (\text{III.45})$$

mit

$$\begin{aligned} a &= (1+ST)(\rho_3 + \rho_1) + S(\rho_2 + \rho_1\rho_3/\rho_2), \\ b &= -(1+S+ST)(\rho_3 - \rho_1), \\ c &= S(\rho_3 + \rho_1) - S(\rho_2 + \rho_1\rho_3/\rho_2). \end{aligned} \quad (\text{III.46})$$

Dabei wurde die trigonometrische Identität $ST^2 + 2T = S$ benutzt.

Wir können jetzt zwei Grenzfälle diskutieren, nämlich den für lange Störungswellenlängen ($\lambda \gg t$) und für kurze Störungswellenlängen ($\lambda \ll t$). Im ersten Fall ($\lambda \gg t$) betragen die beiden

Wachstumsraten $\chi_+ = 0$ und $\chi_- = (\rho_3 - \rho_1) / (\rho_3 + \rho_1)$, unabhängig von ρ_2 [Mik 82]. Die Störungen langer Wellenlängen wachsen also mit der klassischen Rate nach Gleichung (III.16), als ob die mittlere Flüssigkeit nicht vorhanden wäre.

Für kurze Wellenlängen ($\lambda \ll t$) ergibt sich

$$\chi_{\pm} = \frac{\rho_3 - \rho_1 \pm (\rho_2 - \rho_3 \rho_1) / \rho_2}{\rho^3 + \rho^1 + \rho^2 + \rho^3 \rho^1 / \rho^2} \quad \text{d.h.} \\ = (\rho_2 - \rho_1) / (\rho_2 + \rho_1) \quad \text{bzw.} \quad = (\rho_3 - \rho_2) / (\rho_3 + \rho_2) \quad (\text{III.47})$$

Die Störungen an den beiden Trennschichten sind also entkoppelt und wachsen "klassisch" mit ihrer jeweiligen Atwood-Zahl an.

In [Mik 82] wird gezeigt, daß die größere der Wachstumsraten χ minimal wird, wenn $\rho_2 = \sqrt{\rho_1 \rho_3}$ beträgt. χ ist dann (für $\lambda \ll t$)

$$\chi \rightarrow (\rho_3 - \rho_1) / (\sqrt{\rho_3} + \sqrt{\rho_1})^2. \quad (\text{III.48})$$

Eine Atwood-Zahl von 0.82 ($\rho_1 = 1$, $\rho_3 = 10$) wird durch eine Zwischenschicht von $\rho_2 = \sqrt{10} \approx 3.2$ zum Beispiel auf

$$9 / (\sqrt{10} + 1)^2 \approx 0.52$$

reduziert. Das Wachstum wird also um rund 36% gedämpft. Wir wollen diese Resultate nun numerisch verifizieren.

Zunächst untersuchen wir den Fall $\lambda \gg t$ bei einer Atwood-Zahl von 0.82 (s.o.). Die Dicke der Mittelschicht beträgt $t = 0.05$ mm, die Wel-

Wellenlänge der Störung ist $\lambda=0.4$ mm, und die mittlere Dichte wurde von $\rho_2=1$ bis $\rho_2=10$ variiert.

In Fig. III.20 sind die Wachstumsraten in Abhängigkeit von der Mitteldichte aufgetragen (gestrichelte Linie). Sie sind in guter Näherung unabhängig von ρ_2 und haben den gleichen Absolutbetrag wie die Wachstumsrate bei einer scharfen Trennschicht

Damit zeigt unsere Simulation das gleiche Verhalten, wie das analytische Modell.

Wir wollen nun den Fall $\lambda \ll t$ betrachten. Dazu wurde die Mittelschicht $t=1$ mm breit gewählt, während die Wellenlänge der Störung

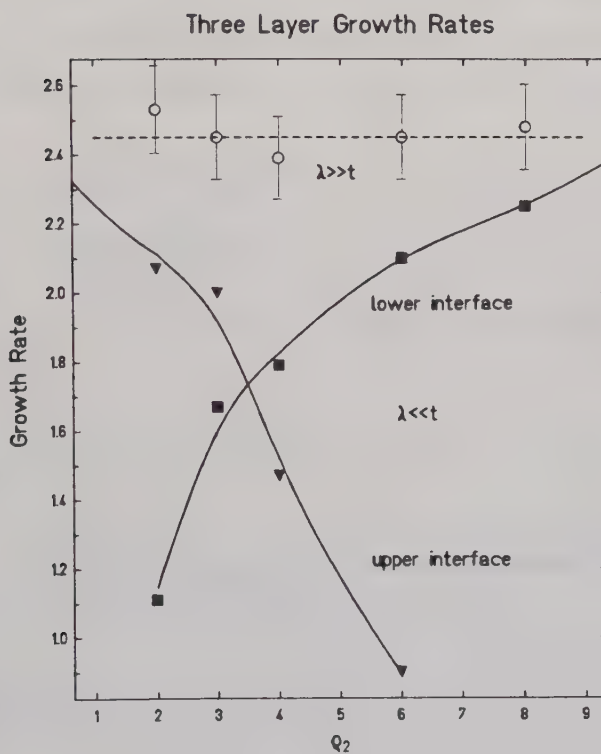


Fig. III.20

nach wie vor $\lambda=0.4$ mm beträgt. Obwohl der Unterschied zwischen t und λ nur einen Faktor 2.5 beträgt, sehen wir in Fig. III.20 (durchgezogene Linien) eine deutliche Abhängigkeit der Wachstumsraten von der Mitteldichte ρ_2 . An der unteren Trennschicht steigt die Wachstumsrate mit zunehmender Mitteldichte ρ_2 , denn dadurch wird die Differenz $\rho_2 - \rho_1$ größer (vgl. Gleichung III.47). An der oberen Trennschicht finden wir ein umgekehrtes Verhalten, denn hier verkleinert sich $\rho_3 - \rho_2$ (Gl. III.47).

Die jeweils größere Wachstumsrate wird im Schnittpunkt der beiden durchgezogenen Linien in Fig. III.20 minimal. Dieser Schnittpunkt liegt bei $\rho_2 \approx 3.4$ (analytisch: $\rho_2 \approx 3.2$). Die stärkere Wachstumsrate wurde bei dieser Dichte von $n=2.45$ auf $n'=1.7$ um rund 31% herabgesetzt (analytisch: rund 36%).

In Anbetracht der Tatsache, daß $t=1$ mm und $\lambda=0.4$ mm den Grenzfall $\lambda \ll t$ nur annähernd erfüllen, kann dieses Resultat als sehr gute Übereinstimmung mit der analytischen Rechnung angesehen werden.

Wir wollen jetzt noch ein Beispiel mit einer kontinuierlich ausgeschmierten Trennschicht betrachten. Eines der wenigen Probleme, das sich dazu analytisch lösen läßt, ist die zwischen zwei Grenzwerten exponentiell ansteigende Dichte [Cha 61]

$$\rho = \rho_0 e^{\beta y}, \quad (III.49)$$

wobei β konstant ist. Damit reduziert sich Gleichung (III.39) zu

$$D^2W + \beta DW - k^2(1 - g\beta/n^2)W = 0 \quad (III.50)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$W = A_1 e^{q_1 Y} + A_2 e^{q_2 Y}. \quad (\text{III.51})$$

A_1 und A_2 sind zunächst willkürliche Konstanten, und q_1 und q_2 sind Lösungen der Gleichung (III.50):

$$q^2 + q\beta - k^2(1 - g\beta/n^2) = 0 \quad (\text{III.52})$$

Zunächst wollen wir annehmen, daß die Flüssigkeit zwischen den beiden Grenzschichten eingeschlossen ist. D.h. W muß am unteren ($y=0$) und am oberen ($y=t$) Rand verschwinden. Daraus folgt

$$w = A(e^{q_1 Y} - e^{q_2 Y}) \quad (\text{III.53})$$

für den unteren und

$$e^{(q_1 - q_2)t} = 1$$

beziehungsweise

$$(q_1 - q_2)t = 2im\pi \quad (\text{III.54})$$

für den oberen Rand. Mit (III.52)

$$\begin{aligned}
 q_1 &= \frac{1}{2} \{-\beta + \sqrt{\beta^2 + 4k^2(1 - g\beta/n^2)}\} \\
 q_2 &= \frac{1}{2} \{-\beta - \sqrt{\beta^2 + 4k^2(1 - g\beta/n^2)}\}
 \end{aligned}
 \tag{III.55}$$

erhalten wird aus Gleichung (III.54):

$$\begin{aligned}
 \beta^2 + 4k^2(1 - g\beta/n^2) &= 4m^2\pi^2/t^2 \quad \text{bzw.} \\
 n^2 &= gk \frac{\beta/k}{1 + \frac{1}{4}(\beta/k)^2 + m^2\pi^2/(k^2t^2)}
 \end{aligned}
 \tag{III.56}$$

In [Mik 82] wird gezeigt, daß diese Lösung für die Wachstumsrate n im Wesentlichen auch für freie Ränder bei $y=0$ und $y=t$ gilt, und in [Kul 82] wird gezeigt, daß diese Lösung für großes t ebenfalls gilt, wenn

$$\rho(y) = \begin{cases} \rho(0) & y \leq 0 \\ \rho(0)e^{\beta y} & 0 < y < t \\ \rho(t) & y \geq t \end{cases}
 \tag{III.57}$$

Für $t \rightarrow 0$ geht n^2 in diesem Fall gegen $n^2 \rightarrow g\beta t/2$.

In Fig. III.21 sind die Resultate der analytischen Rechnungen von Kull [Kul 82] aufgetragen (durchgezogene Linien). Mit unserem Modell wurden diese Ergebnisse systematisch reproduziert (Punkte).

Allerdings konnten die Kurven nicht genau getroffen werden. Das ist jedoch verständlich wenn man bedenkt, daß bereits die

"klassische" Konstellation einer scharfen Trennschicht Unterschiede in den Wachstumsraten ergab, die durch Kelvin Helmholtz-Instabilitäten und Verdünnungseffekte hervorgerufen worden sind (s.o.).

Diese Unterschiede zwischen analytischer Abschätzung und numerischer Lösung betrugen systematisch rund 30% (vgl. auch [Ver 82]). Um den Vergleich in Fig. III.21 durchführen zu können, mußten daher die numerischen Wachstumsraten entsprechend umskaliert werden. Dazu wurde eine einheitliche Differenz von 30% zwischen Analytik und Numerik zugrunde gelegt. Dies ist sicherlich nicht ganz exakt, da die Gestalt und somit der Strömungswiderstand der Spikes bei den einzelnen Konfigurationen stark variieren (s.o.).

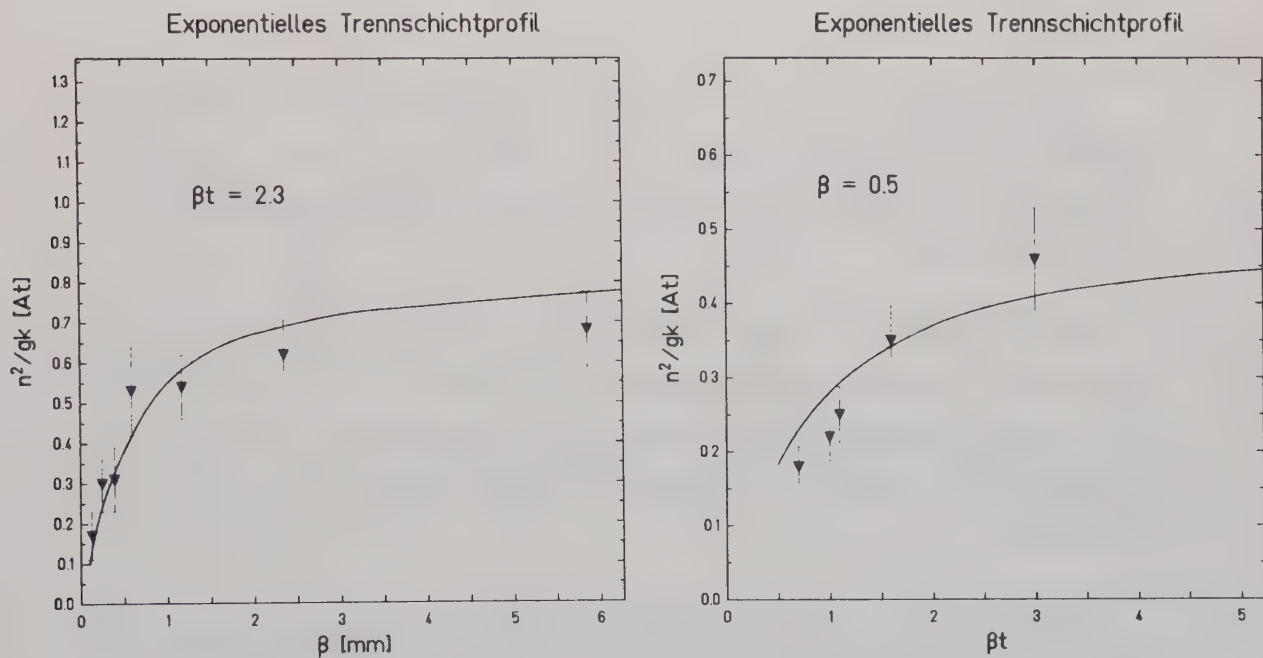


Fig. III.21

Die Punkte in Fig. III.21 sollten daher mit einer Unschärfe von rund 15% diskutiert werden.

Der Anstieg des exponentiellen Dichteprofiles und dessen Breite hängen über den Quotienten der höheren und der niedrigeren Dichte zusammen. Am oberen Rand der Trennschicht gilt nämlich:

$$\beta = 1/t \cdot \ln(\rho_2/\rho_1) \quad (III.58)$$

Bei unseren Rechnungen wurde zunächst der Dichtequotient konstant gehalten ($\rho_2/\rho_1=10$), während β und t variiert wurden. Es ergaben sich die Punkte in der linken Hälfte von Fig. III.21, die die analytischen Rechnungen im Rahmen der oben diskutierten Genauigkeit reproduzieren.

Bei konstantem β (hier $\beta=0.5$) und variiertem Dichtequotienten ergeben sich die Punkte in Fig. III.21 rechts. Auch hier konnten die analytischen Rechnungen im Rahmen der Fehlerbetrachtung reproduziert werden.

Unser Modell ist also in der Lage, auch bei relativ komplexen Strukturen befriedigende Ergebnisse zu liefern. Insbesondere besteht jetzt die Möglichkeit, zukünftige Pelletdesigns schnell auf ihre theoretische Sensitivität gegen Rayleigh-Taylor Instabilitäten zu überprüfen.

Offensichtlich können endliche Breiten der Trennschicht die Wachstumsrate von Rayleigh-Taylor Instabilitäten deutlich dämpfen. Endliche Breiten der Trennschicht lassen sich sehr gut in Mehrschichtpellets realisieren. So könnte zum Beispiel der Übergang

vom Pb-tamper zum PbLi-pusher durch eine dazwischen liegende Schicht mit einer Dichte $\rho = \sqrt{\rho_{\text{PbLi}} \rho_{\text{Pb}}} \approx 3.77 \text{ g/cm}^3$ gedämpft werden. Ein geeignetes Material dafür ist Glas, dessen Dichte von 2.2 bis 6 g/cm³ variiert werden kann [Lan 61], und das sich billig herstellen läßt. Ideal wäre ein pusher mit kontinuierlich nach innen ansteigender Dichte, was jedoch aus praktischen Gründen nicht einfach zu realisieren sein dürfte.

III.2.3.3.2 EINFLUß VON VISKOSITÄT

Eine wichtige Rolle bei der Herabsetzung der RTI-Wachstumsraten könnte auch die Viskosität spielen. Um ein Gefühl dafür zu bekommen, wollen wir eine der oben gemachten Rechnungen mit der zunächst willkürlich gewählten Viskosität $\eta = 0.01 \text{ g/(ns mm)}$ wiederholen. Bei diesem Wert sind kinetische Energie und dissipierte Energie in der gleichen Größenordnung. Die Viskosität sollte deshalb einen Einfluß auf die Dynamik haben.

Fig. III.22 zeigt die zeitliche Entwicklung von Dichte und Geschwindigkeit einer viskosen gestörten Folie im Gravitationsfeld (untere Zeile).

Zum Vergleich ist in der oberen Zeile von Fig. III.22 noch einmal der nichtviskose Fall dargestellt.

Es fällt zunächst auf, daß der bereits oben diskutierte "Anfahrwirbel" mit Viskosität wesentlich größer wird. Dies führt zu einer deutlich schwächeren Ausbildung der Blasen am oberen spike-Ende. Allerdings wird die Folie über einen wesentlich breiteren Bereich gestört.

Auch der spike selbst ist dicker als im nichtviskosen Fall. Durch diese große Dicke verlangsamt sich das Wachstum der Störung zusätz-

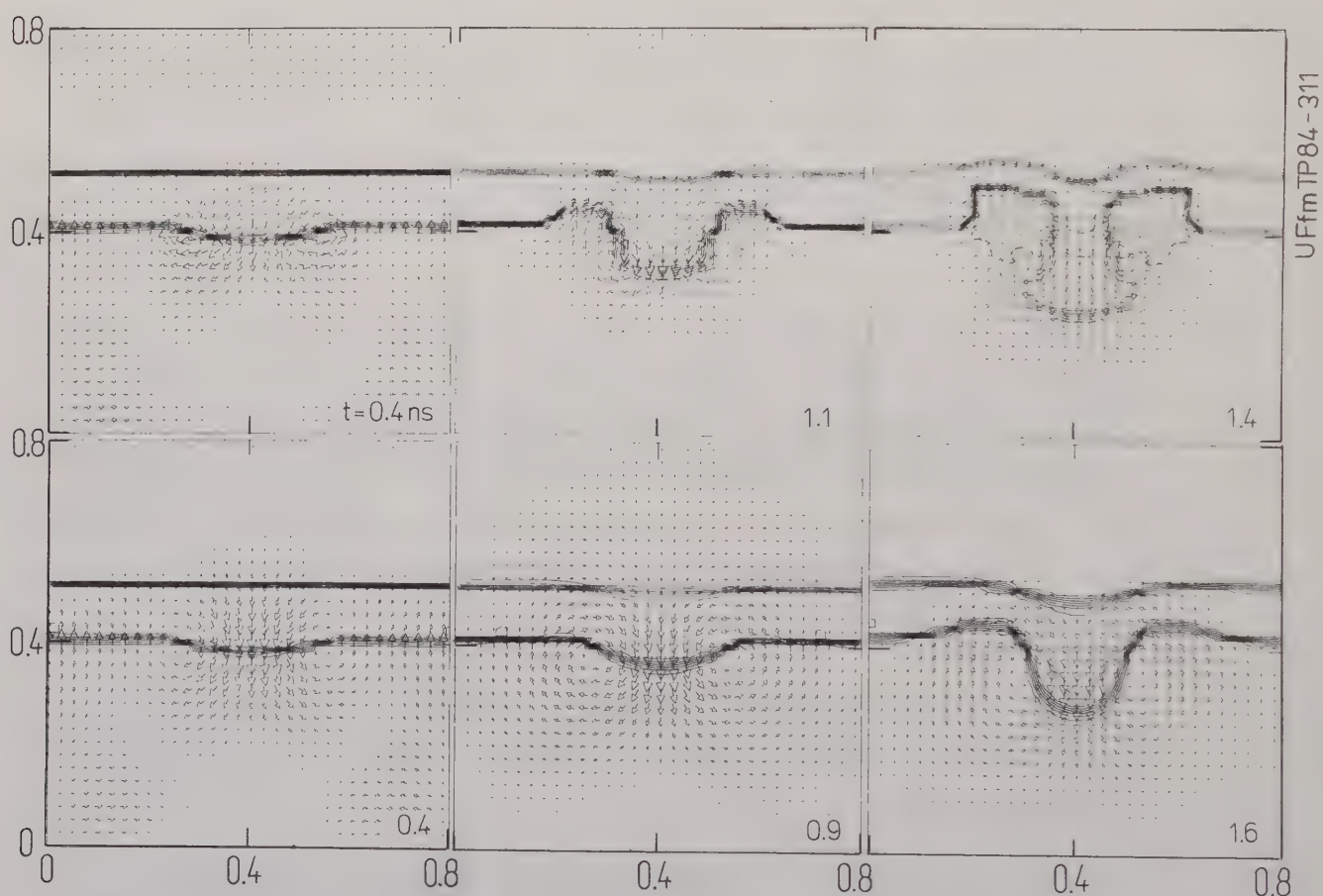


Fig. III.22

lich, denn neben der Viskosität geht auch die Stirnfläche eines umströmten Mediums in die Berechnung des Strömungswiderstandes ein. Die Viskosität dämpft das Auftreten der ansonsten vorkommenden Kelvin Helmholtz-Instabilität stark weil die entgegengesetzten Strömungen sich nun einfach abbremsen und aufheizen, anstatt Wirbel zu erzeugen.

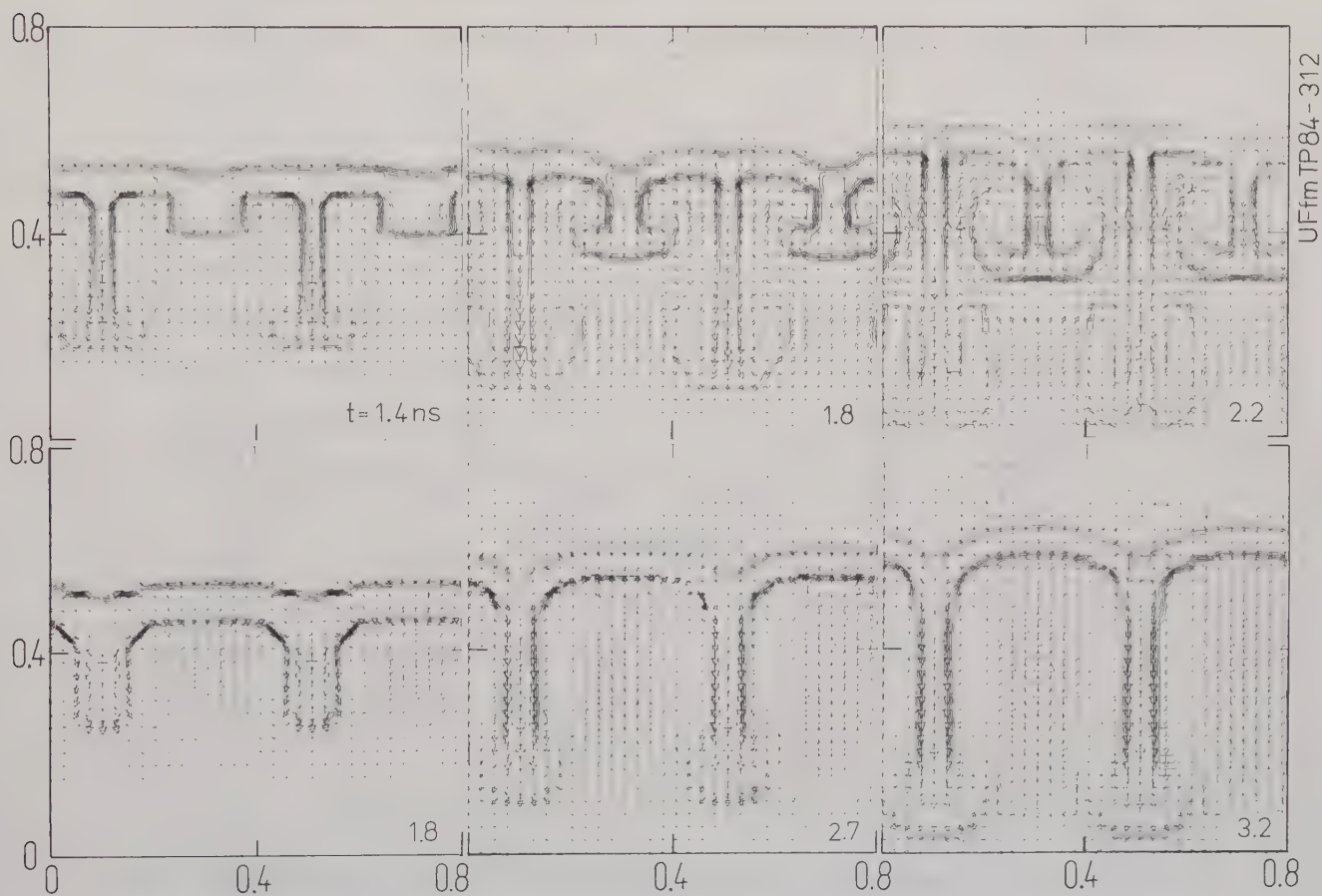


Fig. III.23

Influence of Viscosity

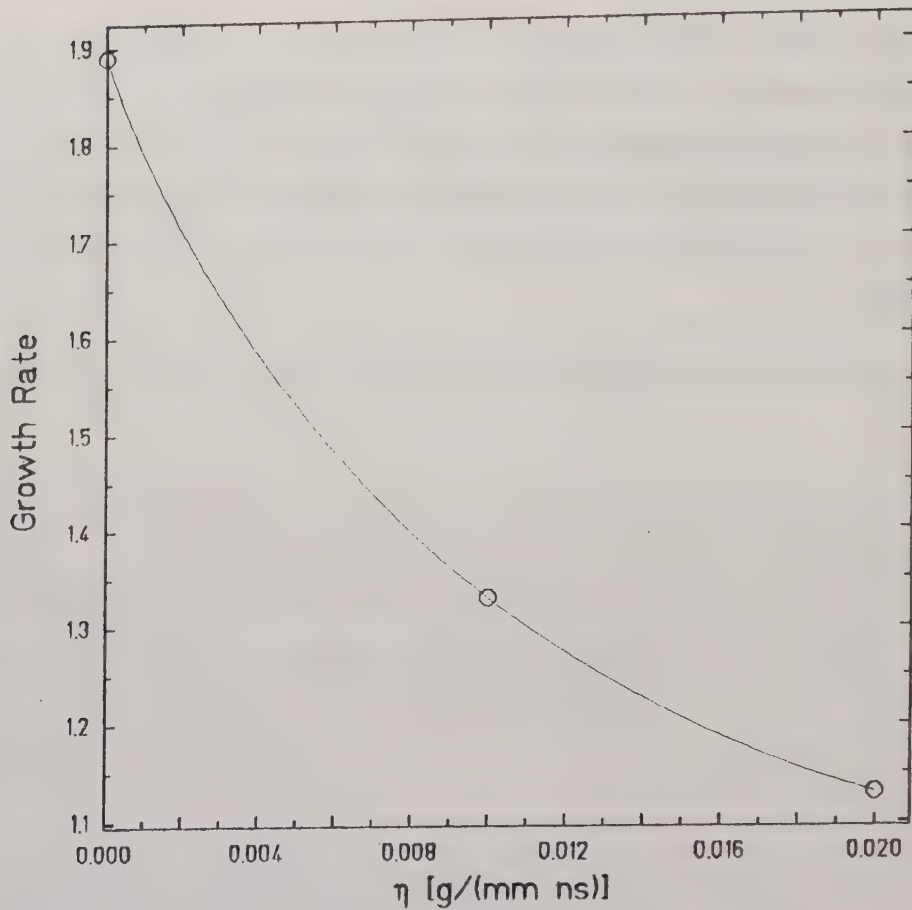


Fig. III.24

Fig. III.23 zeigt die selben Verhältnisse bei doppelter Wellenzahl. Auch hier ist die Strömung mit Viskosität wesentlich breitflächiger. Durch die Bildung der sehr großen bubbles wird die Entstehung der 2. RTI-Generation verhindert, und es bildet sich erst sehr spät eine relativ schwache Kelvin Helmholtz-Instabilität aus. Die viskosen

spikes bleiben sehr lange stabil: Nach 3.2 ns läßt sich noch ein guter Zusammenhalt beobachten, während ohne Viskosität die spikes bereits nach 2.2 ns stark ausgedünnt waren. Auch das spike-Wachstum ist wesentlich langsamer als bei $\eta=0$.

Der Einfluß der Viskosität auf die Wachstumsraten wird in Fig. III.24 gezeigt. Dabei wird deutlich, wie stark die Wachstumsrate einer Rayleigh-Taylor Instabilität durch das Vorhandensein von Viskosität verringert würde.

Mit $\eta=0.01 \text{ g}/(\text{ns mm})$ wird das Wachstum bereits um rund 30% langsamer, bei $\eta=0.02 \text{ g}/(\text{ns mm})$ beträgt der Effekt bereits rund 40%. Anscheinend wird der Einfluß der Viskosität bei größeren Werten teilweise dadurch aufgehoben, daß der spike durch die mehr und mehr abgeschwächte Kelvin Helmholtz-Instabilität eine strömungsgünstigere Form erhält. Der viskosen Abbremsung des spikes wirkt diese strömungsgünstige Form dann entgegen.

Die Viskosität wirkt sich weiterhin bemerkenswert auf das Auftreten kritischer Wellenlängen bzw. Schichtdicken aus. In Fig. III.25 ist die nichtviskose Rechnung aus Fig. III.8 für $At=0.6$ mit einer Studie für $\eta=0.01 \text{ g}/(\text{ns mm})$ verglichen.

Durch die Dämpfung des bubble-Wachstums und das schwächere Nachfließen dichter Materie in den spike tritt bei viskoser Rechnung keinerlei Maximum in der Wachstumsrate mehr auf. Vielmehr sinkt die Wachstumsrate mit abnehmender Schichtdicke monoton. Viskosität würde sich demnach für die Stabilität einer beschleunigten gestörten Folie sehr günstig auswirken; allerdings nur bei Reibungskoeffizienten η , wie sie hier benutzt wurden. Wir wollen des-

Influence of Viscosity

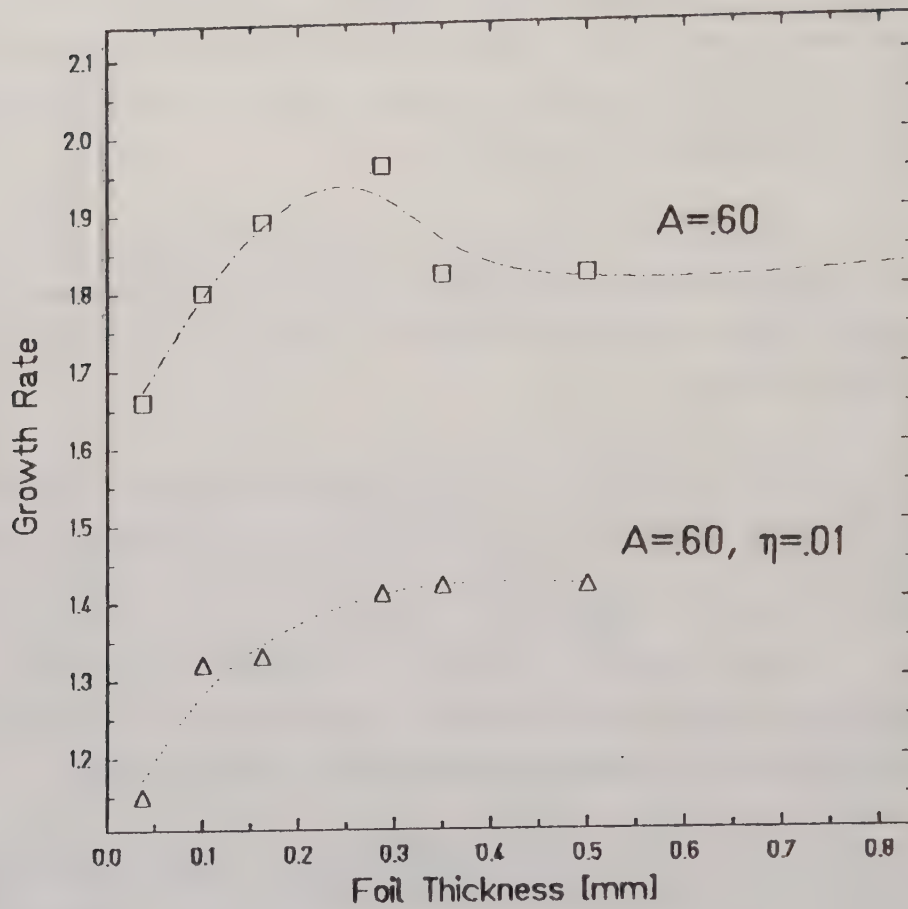


Fig. III.25

halb untersuchen, inwieweit die Viskosität aus unserer Rechnung im Rahmen der HIBALL-Studie [Bad 81] realistisch ist:

Zwei Flüssigkeiten zeigen ähnliches Verhalten, wenn ihre Reynolds-Zahlen

$$R = \rho l v / \eta$$

(III.59)

gleich sind [Lan 66]. Dabei ist ρ eine charakteristische Dichte; l , v und η sind charakteristische Werte von Länge, Geschwindigkeit und Viskosität im betrachteten System.

Wir wollen zunächst die Reynolds-Zahl für die HIBALL-Studie bestimmen. Mit $\rho=5 \text{ g/cm}^3$, $l=0.8 \text{ mm}$, $v=1.7 \cdot 10^7 \text{ cm/sec}$ und $\eta=8 \cdot 10^{-4} \text{ kg/(m sec)}$ ergibt sich R zu

$$R_{\text{HIBALL}} = 8.6 \cdot 10^8,$$

(III.60)

wobei ρ und v die typischen Werte zu Beginn der Implosionsphase sind [MtV 81]. Für die Viskosität wurde der Wert für ein metallisches Plasma mit einer Temperatur von $T \approx 100 \text{ eV}$ [Con 67] eingesetzt.

Die Reynolds-Zahl in unserer Viskositätsstudie ergibt sich mit $\rho=4 \text{ g/mm}^3$, $l=0.8 \text{ mm}$, $v=0.3 \text{ mm/ns}$ und $\eta=0.01 \text{ g/(ns mm)}$ zu

$$R_{\text{Ffm}} = 1.2 \cdot 10^2.$$

(III.61)

Somit ist die in unserer Studie benutzte Viskosität um ca. das 10^6 -fache zu groß, um ein ähnliches Flußverhalten, wie in der HIBALL-Studie erwarten zu können. Viskosität scheint demnach vernachlässigbar zu sein.

Es gibt jedoch Messungen von Mineev et al. [Min 67], wo Viskositäten bei durch Schockwellen erzeugten hohen Drucken bestimmt werden. Dabei stellt sich heraus, daß die Viskositäten bei den hier relevanten Dichten das 10^6 bis 10^7 -fache von dem betragen können, was für ein normales Plasma erwartet wird. Unter diesen Aspekten gelangen die Reynolds-Zahlen in (III.60) und (III.61) in die gleiche Größenordnung. Es kann deshalb nicht ausgeschlossen werden, daß im Pellet Viskositätseffekte wichtig werden. Allerdings sind die Vorhersagen aus [Min 67] mit Vorsicht zu genießen, denn die Aussage für unsere Parameter ρ , T konnte nur durch Extrapolation des Daten-Fits von Mineev et al. weit über die Daten hinaus getroffen werden. Es ist aber die exakte Kenntnis von $\eta(\rho, T)$ erforderlich, um die Reynolds-Zahl sicher bestimmen zu können.

Bisher existieren noch zu wenige experimentelle Daten, so daß hier nur die prinzipiellen Auswirkungen der Viskosität diskutiert werden können.

IV. ZUSAMMENFASSUNG UND AUSBLICK

Wir haben in dieser Arbeit gezeigt, daß bereits in der Anfangsphase der Pelletimplosion nicht vernachlässigbare Probleme auftreten, die einer ausführlichen Analyse bedürfen: Eine ungünstige Strahlgeometrie kann ebenso wie Rayleigh-Taylor Instabilitäten zum vorzeitigen Zerschlagen des Pellets führen.

In dieser Arbeit wurde die optimale Strahlgeometrie für die HIBALL-Studie [Bad 81] bestimmt. Es zeigte sich, daß der gegenwärtige Stand der Studie diesem Optimum nicht entspricht. In unseren Untersuchungen erwies sich ein Strahlwinkel von 33° als günstigste Lösung, während in der HIBALL-Studie aus technischen Gründen nur 10° realisiert wurden.

Ob die Situation durch Strahlungs-Wärmeleitung günstiger wird, sollen künftige Studien zeigen, an denen zur Zeit gearbeitet wird.

Die Sensitivität einer beschleunigten Pellet-Schicht auf Rayleigh-Taylor Instabilitäten wurde ebenfalls untersucht. Es wurde gezeigt, daß eine Störung wesentlich langsamer wächst, als man mit einem linearen analytischen Modell abschätzt. Dies liegt vor allem an dem Auftreten von Wirbeln, verbunden mit Kelvin Helmholtz-Instabilitäten: Der spike-Kopf einer Rayleigh-Taylor Instabilität bekommt dadurch eine strömungsungünstige Form, wodurch das Wachstum gedämpft wird. Eine sehr starke Verminderung des Wachstums wird bei dem Eintritt in die nichtlineare Phase deutlich. Hier wird die numerische Simulation unumgänglich. Die auftretenden Verdünnungseffekte erfordern eine voll kompressible Beschreibung.

Es wurde bei unseren Rechnungen gezeigt, daß die prinzipielle Entwicklung einer Rayleigh-Taylor Instabilität stark von der Gestalt der anfänglichen Störung abhängt. Insbesondere erscheint eine reine Sinusstörung nicht unbedingt repräsentativ für das unendliche Spektrum willkürlicher Störungen.

Sekundäreffekte, wie das Auftreten einer zweiten RTI-Generation wurden erstmals numerisch beobachtet.

Für Kornstörungen wurde die kritische Schichtdicke bestimmt, bei der die Wachstumsrate ein Maximum aufweist. Die gefundenen Werte stimmen mit der Abschätzung eines einfachen analytischen Modells überein; allerdings sind die Maxima sehr schwach ausgeprägt.

Es wurde gezeigt, wie sich das Anwachsen einer Rayleigh-Taylor Instabilität dämpfen läßt. Hier sind vor allem das Ausschmieren der Trennschicht und der Einfluß von Viskosität zu nennen. Allerdings ist unklar, inwieweit die erforderlichen Viskositätswerte im aufgeheizten Pellet erreicht werden. Hier müssen experimentelle Daten abgewartet werden.

Auch für Rayleigh-Taylor Instabilitäten kann die Strahlungs-Wärmeleitung einen Einfluß haben. Insbesondere kann sich ihre dissipative Wirkung dämpfend auf das Wachstum einer Störung auswirken.

Mit dieser Arbeit wurde die Grundlage für weitere detaillierte Untersuchungen der frühen Phase der Pelletimplosion geschaffen. Insbesondere kann für zukünftige Konzeptstudien sofort eine Aussage über die Pelletstabilität in der Anfangsphase getroffen werden. Auch eine Ausweitung der Computersimulationen auf drei Dimensionen

dürfte keinerlei Schwierigkeiten bereiten, denn in kernphysikalischen Anwendungen [Buc 83a, Sto 82] wurden dafür bereits reichlich Erfahrungen gesammelt.

1) DAS ITERATIONSVERFAHREN

Unser System von Differentialgleichungen (II.1-II.3) bzw. (III.19, III.20, III.21) kann auf die allgemeine Form

$$\partial_t G + \partial_x (Gv) = S \quad (A.1)$$

zurückgeführt werden, wobei G die zu propagierende Größe ist. S steht für eventuell vorhandene Quellterme.

Gleichung (A.1) läßt sich auf zwei prinzipiell verschiedenen numerischen Gittern lösen: Bei Lagrange'schen Gittern werden die numerischen Stützstellen mit dem Gitter mitbewegt, und das Volumen einer Zelle wird an die vorhandene Dichte G angepaßt. Das hat den Vorteil, daß sehr hohe Verdichtungen beschrieben werden können, und daß Trennschichten zwischen verschiedenen Flüssigkeiten genau beibehalten werden können. Ein gravierender Nachteil ist jedoch, daß bei mehrdimensionalen Problemen das Gitter seine Ausdehnung in den unterschiedlichen Koordinatenrichtungen verschieden ändert. Dies führt dazu, daß das Gitter stark deformiert wird. Insbesondere bei dreidimensionalen Rechnungen führt dies zu nahezu unlösbaren Problemen. Eine Beschreibung von mehrdimensionalen Wirbeln ist wegen der starken Gitterdeformationen sogar völlig aussichtslos.

Euler'sche Gitter dagegen sind fest im Raum, und die Flüssigkeit bewegt sich darüber hinweg. Es gibt also keinerlei Gitterdeformation. Durch den konstanten Gitterpunktabstand Δx lassen sich jedoch keine beliebig starken Kompressionen mehr beschreiben. So wird eine numerische Rechnung spätestens dann bedeutungslos, wenn sich die gesamte Masse des Systems an einem Gitterpunkt angesammelt hat.

Man wird also immer dann ein Lagrange'sches Gitter wählen, wenn besonderen Wert auf eine gute Beschreibung großer Dichteschwankungen gelegt wird. Will man jedoch mehrdimensionale Bewegungen gut beschreiben, so ist ein Euler'sches Gitter angebracht.

In unserem Fall werden nur Verdichtungen von ca. 3-4 erzielt, während bei den Symmetrie- und vor allem bei den Stabilitäts-Studien mit starken Wirbeln zu rechnen ist. Für unser Problem ist daher ein Euler'sches Gitter geeignet. Wir müssen jedoch auch mit Diskontinuitäten, wie z.B. Schocks arbeiten können.

Mehrdimensionale Probleme, wie in unserem Fall, können durch aufeinander folgende Integration von Gleichung (A.1) in den jeweiligen Koordinatenrichtungen gelöst werden. Für eine allgemeine Diskussion des numerischen Verfahrens genügt es daher, die eindimensionale Formulierung von Gleichung (A.1) zu betrachten (vgl. auch [Gra 84]).

In Gebieten, wo die Dichteverteilung $G(x)$ und die Geschwindigkeitsverteilung $v(x)$ einigermaßen glatt sind, liefern die meisten Verfahren, wie z.B. Lax-Wendroff [Lax 60, Mor 71] oder Leapfrog [Ric 67, Mor 71, Rob 66, Hal 68] befriedigende Ergebnisse. Bei steilen Gradienten oder bei Schocks sowie bei Gebieten mit großen Geschwin-

digkeiten sind in diesen Verfahren die Abschneidefehler in der Größenordnung der Lösung, so daß sich kurzweilige Störungen nach wenigen Iterationen zu numerischem Unfug verstärken [Bor 73,75,76]. Dabei tritt eine große numerische Viskosität auf, die eine scharfe Schockfront stark verbreitert.

Im sogenannten Flux Corrected Transport (FCT) Algorithmus von Boris und Book [Bor 73] ist dies jedoch nicht der Fall [Buc 81,82]. Dies wird im Wesentlichen durch eine zusätzliche physikalische Forderung an die Kontinuitätsgleichung erzielt: Der Forderung nach Positivität [Bor 73]. Dadurch bleibt eine scharfe Schockfront auf drei Gitterpunkte begrenzt (s.u.). Nach [Lan 66, Buc 81] läßt sich dann die numerische Viskosität mit Hilfe von

$$\delta = 4/\rho c \cdot (4/3\eta + \xi) \quad (\text{A.2})$$

abschätzen, wobei δ die Breite der Schockfront bedeutet. $(4/3\eta + \xi)$ steht hier für die numerische Viskosität. Mit $\rho \approx 3 \cdot 1.26 \text{ g/cm}^3$, $c \approx 1,7 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}$ und $\delta \approx 3 \cdot \Delta x = 3 \cdot 0.025 \text{ mm}$ ergibt sich die numerische Viskosität zu

$$(4/3\eta + \xi) \approx 2 \cdot 10^{-19} [\text{g/mm ns}] \quad (\text{A.3})$$

Dies ist um mehr als zehn Größenordnungen kleiner als die Viskosität, die in Abschnitt III.2.3.3.2 einen Einfluß auf die Dynamik zeigte. Numerische Viskosität kann bei diesen Betrachtungen also mit gutem Gewissen vernachlässigt werden.

Wir wollen jetzt den expliziten Euler'schen FCT-Algorithmus SHASTA (Sharp And Smooth Transport Algorithmus) beschreiben [Bor 73, Buc 80, Mar 82, Gra 84]. Dieser Algorithmus besteht aus zwei Phasen: einer Transportphase (auch konvektive Phase) und einer Antidiffusionsphase (auch Korrekturphase). Beide Phasen erhalten die "Gesamtmasse" $\int G dx$ und die Positivität. Ihre Kopplung erlaubt es, mit dem FCT-Algorithmus starke Schocks zu behandeln, ohne daß dabei numerische Störungen auftreten. Allerdings müssen bei der numerischen Integration des vollen hydrodynamischen Gleichungssystems noch einige Details beachtet werden. Diese Details sind in [Gra 84] ausführlich erläutert.

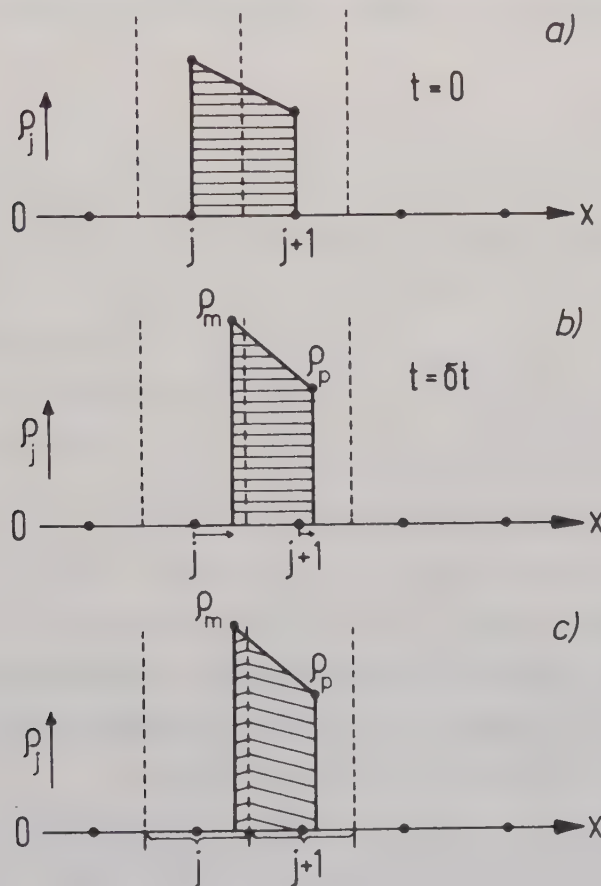
Die Transportphase des SHASTA-Algorithmus hat eine einfache geometrische Interpretation. Figur A.1a) zeigt die Dichteverteilung in einem äquidistanten Euler'schen Gitter zum Zeitpunkt $t=0$. Die Dichten an den Punkten j , ρ_j^0 , sind bekannt; ebenso wie die Geschwindigkeiten der entsprechenden Flüssigkeit in der Mitte des Zeitschrittes bei $\Delta t/2$, $v_j^{\frac{1}{2}}$. Gesucht sind die Dichten am Ende des Zeitschrittes $t=\Delta t$.

Der Transportschritt betrachtet für jedes Flüssigkeitselement das Trapez, das durch geradlinige Verbindung benachbarter Dichten entsteht. Dieses stückweise lineare Dichteprofil ist konsistent mit der Definition der Gesamtmasse

$$M_0 = \sum_j G_j \Delta x \quad . \quad (A.4)$$

Der Einfachheit halber wollen wir im Folgenden $G \equiv \rho$ setzen, wobei unter ρ aber immer noch irgendeine "Dichte" verstanden werden soll.

Die kurzen Pfeile an den Punkten j und $j+1$ sollen die Flüssigkeitsbewegung an diesen Stellen repräsentieren (Fig. A.1b). Wir verfolgen zunächst die Bewegung eines Flüssigkeitselementes im Lagrange'schen Sinne, d.h. die Grenzen der Zelle bewegen sich um $v_j^{\frac{1}{2}}\Delta t$ bzw. um $v_{j+1}^{\frac{1}{2}}\Delta t$, und das Flüssigkeitselement hat nun eine verschobene Position (Fig. A.1b). Die Höhe der beiden Seiten im Trapez verändert sich dabei umgekehrt proportional zur Kontraktion bzw. Dilatation der Basislänge des Trapezes. Es gilt



UFFmTP 84-308

Fig. A.1

$$\rho_p = \rho_{j+1}^0 \Delta x / [\Delta x + \Delta t (v_{j+1}^{\frac{1}{2}} - v_j^{\frac{1}{2}})]$$

und

$$\rho_m = \rho_j^0 \Delta x / [\Delta x + \Delta t (v_{j+1}^{\frac{1}{2}} - v_j^{\frac{1}{2}})] \quad (\text{A.5})$$

Es ist offensichtlich, daß hierbei die Fläche des Trapezes und somit die Gesamtmasse erhalten bleibt. Es ist auch offensichtlich, daß ρ_p und ρ_m immer positiv bleiben, falls alle $\rho_j^0 > 0$ waren, und

$$v \Delta t / \Delta x < \frac{1}{2} \quad (\text{A.6})$$

galt. Damit bleiben auch die auf das alte Gitter zurück interpolierten Dichten positiv.

Die Rücktransformation der Dichten auf das alte Euler'sche Gitter (Fig. A.1.c) ist einfach: Die Fläche des Trapezes rechts von der Zellgrenze (in der Mitte zwischen den Punkten j und $j+1$) kann durch eine einfache Interpolationsformel gefunden werden. Diese Flüssigkeit ist dem Punkt $j+1$ zugeordnet, während der Rest dem Punkt j zugeordnet wird. Alle Flüssigkeitselemente werden unabhängig und in der gleichen Weise behandelt. So erhält die Zelle j auch einen Transportbeitrag von $j-1$, und $j+2$ trägt noch zu $j+1$ bei. Die vollständige Transportvorschrift für $\rho_j^0 \rightarrow \rho_j^1$ ist:

$$\rho_j^1 = \frac{1}{2} Q_-^2 (\rho_{j-1}^0 - \rho_j^0) + \frac{1}{2} Q_+^2 (\rho_{j+1}^0 - \rho_j^0) + (Q_+ + Q_-) \rho_j^0 + \Delta t \cdot S_j^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.7})$$

wobei

$$Q_{\pm} = (\frac{1}{2} + v_j^{\frac{1}{2}} \Delta t / \Delta x) / [1 \pm (v_{j \pm 1}^{\frac{1}{2}} - v_j^{\frac{1}{2}}) \Delta t / \Delta x] \quad (\text{A.8})$$

Die Vorschrift (A.7) enthält jedoch eine starke Diffusion. Dies erkennen wir am besten im Grenzfall verschwindender Quellen S und vernachlässigten Geschwindigkeiten v . Dann ist

$$\rho_j^1 = \rho_j^0 + 1/8 \cdot (\rho_{j+1}^0 - 2\rho_j^0 + \rho_{j-1}^0) \quad (\text{A.9})$$

Da der Vorfaktor der zweiten Differenz nicht proportional $\Delta t / \Delta x^2$ ist, entspricht dies einer rein numerischen Diffusion. Wir wollen zur Vereinfachung der folgenden Überlegungen die Operatoren T für den Transport und D für die Diffusion einführen. Gleichung (A.7) läßt sich dann symbolisch als

$$\rho^1 = (1 + T + D) \rho^0 \quad (\text{A.10})$$

schreiben.

Da wir mit Gleichung (A.7) einen echten Fehler machen, liegt es nahe, diesen Fehler einfach wieder zu subtrahieren:

$$\rho_j^{1'} = \rho_j^1 - 1/8 \cdot (\rho_{j+1}^0 - 2\rho_j^0 + \rho_{j-1}^0) \quad (\text{A.11})$$

Oder symbolisch:

$$\rho^{1'} = (1-D) \rho^1 = (1-D)(1+T+D) \rho^0 \quad (\text{A.12})$$

Dies ist sicherlich der einfachste Weg, hat aber den entscheidenden Nachteil, daß bei verschwindendem Transport ($T \rightarrow 0$) immer noch eine Diffusion zweiter Ordnung übrig bleibt.

Implizite Antidiffusion umgeht dieses Problem. Es muß jedoch in jedem Zeitschritt ein implizites Gleichungssystem gelöst werden, das symbolisch durch

$$\rho^{1'} = (1+D)^{-1} \rho^1 = (1+D)^{-1} (1+T+D) \rho^0 \quad (\text{A.13})$$

definiert wird. Dies ist sehr rechenintensiv.

Es gibt jedoch einen guten Kompromiß zwischen diesen beiden Möglichkeiten, nämlich die sogenannte "phoenical antidiffusion", die durch

$$\rho^{1'} = [(1-D)(1+T) + D] \rho^1 \quad (\text{A.14})$$

definiert wird, beziehungsweise durch

$$\rho_j^{1'} = \rho_j^1 - 1/8 \cdot (\rho_{j+1}^1 - 2\rho_j^1 + \rho_{j-1}^1) \quad (\text{A.15})$$

Die Vorschrift (A.15) vereinigt die Vorteile der beiden vorangegangenen Vorschläge. Allerdings wurden diese Formulierungen nur

für verschwindende Geschwindigkeiten diskutiert, wo Gleichung (A.9) gilt. Im allgemeinen Fall wird die Diffusion in (A.7) eine kompliziertere Form haben, so daß die Antidiffusion in (A.15) an Genauigkeit verliert. Aufgrund der komplexen Struktur in (A.7) ist dies jedoch schwer exakt zu testen. Numerische Tests in [Bor 73,75,76] ergaben ein sehr gutes Verhalten; auch bei steilen Dichtegradienten und bei hohen Geschwindigkeiten.

Die Antidiffusion in Gleichung (A.15) ist jedoch nicht mehr positiv. Das einfache Beispiel in Figur A.2 zeigt den Grund dafür:

Die Antidiffusion, die eigentlich nur numerische Fehler beseitigen sollte, ruft neue numerische Fehler (in Fig. A.2 an den Punkten j und $j+1$) hervor. Es werden nämlich neue Maxima und Minima aufgebaut, obwohl dies physikalisch nicht sinnvoll ist. Das neue Minimum in Figur A.2 ist sogar negativ.

Um dieses Problem zu beseitigen, ist es günstig, direkt mit den Masseflüssen zu arbeiten. Gleichung (A.15) wird dann zu

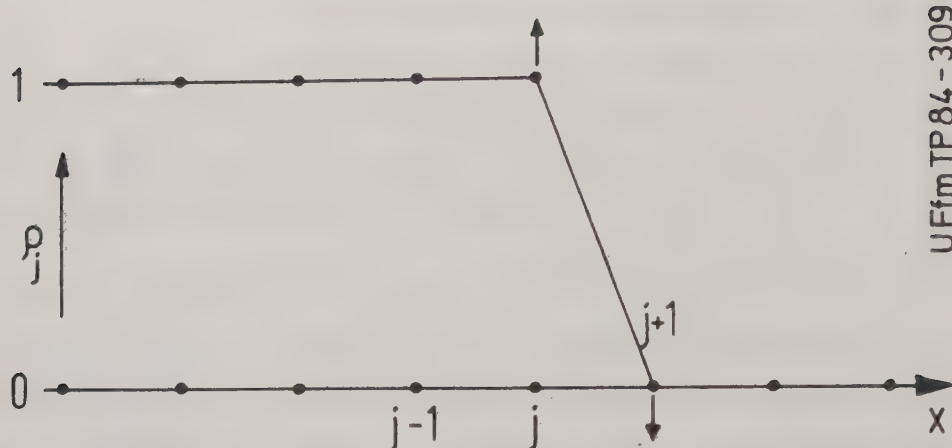
$$\rho_j^1 = \rho_j^1 - f_{j+\frac{1}{2}} + f_{j-\frac{1}{2}} \quad (\text{A.16})$$

wobei

$$f_{j\pm\frac{1}{2}} \equiv \pm 1/8 \cdot (\rho_{j\pm 1}^1 - \rho_j^0) \quad (\text{A.17})$$

Gleichung (A.16) hat zwei wichtige Eigenschaften:

- Die Antidiffusionsflüsse $f_{j\pm\frac{1}{2}}$ bewirken einen expliziten Materialtransport.



UFfm TP 84 - 309

Fig. A.2

- Gleichung (A.16) erhält exakt die Masse, da jedes f einmal addiert und einmal subtrahiert wird. (Außer an den Randpunkten.)

Die folgende qualitative Beschränkung für den Antidiffusion-Massenfluß zur Erhaltung der Positivität drängt sich nahezu auf:

DIE ANTIDIFFUSION SOLL WEDER NEUE MAXIMA ODER MINIMA GENERIEREN, NOCH SOLL SIE BESTEHENDE EXTREMA VERSTÄRKEN.

Diese Beschränkung erhält offensichtlich die Positivität. Schwieriger ist es allerdings, zu einer quantitativen Formulierung zu kommen.

Dies kann durch eine Korrektur der Antidiffusion-Massenflüsse erreicht werden: Die $f_{j+\frac{1}{2}}$ werden einfach Term für Term derart beschränkt, daß kein Massentransfer durch f die Dichte an einem Gitterpunkt über die Dichte des Nachbarpunktes hinaus verändern kann. Dies ist der Ursprung des Namens FLUX CORRECTED TRANSPORT und der eigentliche Clou der Methode.

Die korrigierten Flüsse werden durch die Vorschrift

$$f'_{j+\frac{1}{2}} = \text{sign} \cdot \max [0, \min \{ \Delta_{j-\frac{1}{2}} \cdot \text{sign}, 1/8 |\Delta_{j+\frac{1}{2}}|, \Delta_{j+\frac{3}{2}} \cdot \text{sign} \}] \quad (\text{A.18})$$

mit

$$\text{sign} = \text{sgn } \Delta_{j+\frac{1}{2}} \quad (\text{A.19})$$

und

$$\Delta_{j+\frac{1}{2}} \equiv \rho_{j+1}^1 - \rho_j^1 \quad (\text{A.20})$$

bestimmt und in Gleichung (A.16) eingesetzt. Gleichung (A.18) ist die quantitative Realisierung der oben gemachten qualitativen Beschränkung.

Mit den Vorschriften (A.7, A.16 und A.18) kann das Gleichungssystem (III.19 - III.21) zeitlich integriert werden. Die Geschwindigkeiten und Quellterme zur Zeit $t+\frac{1}{2}\Delta t$ lassen sich durch Anwendung des Verfahrens mit $\Delta t/2$ oder durch lineare Extrapolation aus den vorherigen Zeitschritten abschätzen.

2) BERÜCKSICHTIGUNG VON VISKOSITÄT

In den vorangegangenen Betrachtungen haben wir gesehen, daß bereits die nichtviskose Integration der Gleichungen (II.1 - II.3) beziehungsweise (III.19 - III.21) einige numerische Probleme aufwirft.

Natürlich ist die Genauigkeit der Ergebnisse um so besser, je kleiner der Gitterpunktabstand Δx gewählt wird. Dabei gibt es jedoch praktische Beschränkungen. Der maximal erlaubte Zeitschritt ist

$$\Delta t < \Delta x / (2 \cdot v_{\max}) \quad . \quad (A.21)$$

So wird verhindert, daß sich die Flüssigkeit während einer Iteration weiter als einen halben Gitterpunktabstand fortbewegt, was die Eindeutigkeit des Verfahrens zerstören würde und zu numerischen Instabilitäten führt [Ric 67, Bor 73]. $v_{\max}$ ist die größte im System vorkommende Geschwindigkeit.

Man kann nun die benötigte Rechenzeit t_{CPU} abschätzen: Einerseits ist $t_{\text{CPU}} \propto 1/\Delta t \propto 1/\Delta x$. Andererseits ist t_{CPU} auch noch proportional zur Anzahl der besetzten Punkte in unserem Rechengitter P . Mit $P \propto 1/\Delta x^2$ für zwei Dimensionen gilt also insgesamt

$$t_{\text{CPU}} \propto 1/\Delta x^3$$

(A.22)

Die benötigte Rechenzeit steigt demnach kubisch mit den Genauigkeitsanforderungen. Rechnungen auf einem Gitter mit 32×32 Punkten benötigten bei unseren Studien ca. fünf Minuten Rechenzeit, während bei 128×128 Punkten bereits bis zu zwei Stunden verbraucht wurden.

Die Situation wird noch drastischer, wenn mit Viskosität und Wärmeleitung ($\kappa, \eta \neq 0$) gerechnet werden soll. Dann treten zweite Ableitungen in der propagierten Größe auf. In [Ric 67] wird gezeigt, daß diese Konstellation numerisch nur lösbar ist, wenn gilt

$$\Delta t < \Delta x^2 / (2\kappa)$$

(A.23)

bei Wärmeleitung und

$$\Delta t < \Delta x^2 \cdot \rho / (2 \cdot 4/3 \cdot \eta)$$

(A.24)

bei Viskosität [Buc 82]. t_{CPU} steigt dann bereits mit der vierten Potenz von $1/\Delta x$ an. Der Faktor $4/3$ ergibt sich aus der Addition aller Terme mit zweiter Ableitung im Reibungstensor der Gleichung (III.20) bzw. (III.21).

Da in unseren Rechnungen kontinuierlich auf null abfallende Dichten auftreten (z.B. an der Oberfläche eines Pellets oder einer Folie),

kann sogar die Beschränkung des Zeitschrittes $\Delta t \rightarrow 0$ auftreten, und zwar unabhängig vom Gitterpunktabstand.

Diese Schwierigkeit können wir durch die Einführung einer heuristischen Gewichtsfunktion

$$f(\rho) = 1 - e^{-(\rho/(\cdot 6\rho_0))^3} \quad (\text{A.25})$$

mit $\eta'(\rho) = f(\rho) \cdot \eta$ umgehen (Fig. A.3).

Es existiert bei diesem Ansatz für sehr kleine Dichten also keine Reibung, was im Grenzfall $\rho \rightarrow 0$ sogar plausibel ist. ρ_0 ist dabei eine Anfangsdichte, wie z.B. $\rho_0 = \rho_{\text{PbLi}} = 1.26 \text{ g/cm}^3$. Für $\rho = \rho_0$ wirkt die Viskosität erst zu rund 98%, was jedoch keinen großen Fehler darstellt: Erstens spielt sich die wichtige Dynamik ohnehin in der Schockzone mit $\rho > \rho_0$ ab, und zweitens ist die tatsächliche Viskosität von PbLi bei den hier betrachteten Temperaturen und Drucken noch unbekannt, so daß sowieso nur qualitative Studien getrieben werden können.

Die Zeitschrittbeschränkung (Gleichung A.24) wird jetzt zu

$$\Delta t < \Delta x^2 / (2 \cdot 4/3 \cdot \eta) \cdot \rho / f(\rho) \quad (\text{A.26})$$

Minimiert man $\rho/f(\rho)$ in Gleichung (A.26) bezüglich ρ , so ergibt sich ein Wert von 0.16264, und damit bleibt Δt endlich.

Eine derartige Behandlung der Navier Stokes-Gleichungen garantiert ein stabiles numerisches Verhalten. Allerdings ist ein enormer

Weight for Viscosity

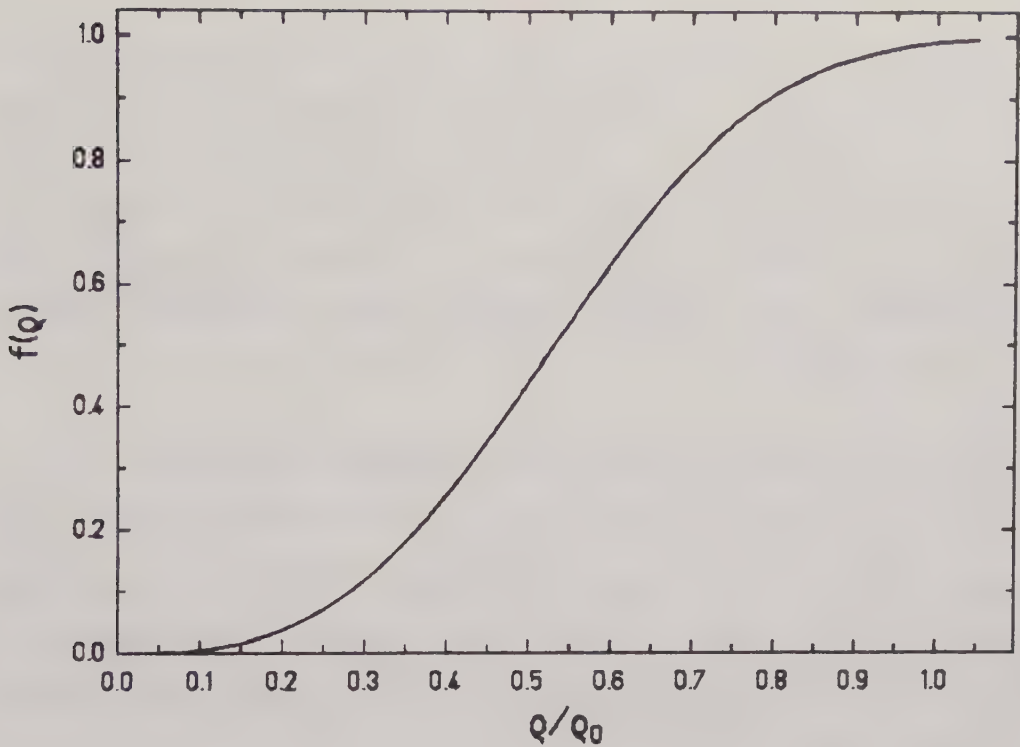


Fig. A.3

Anstieg der Rechenzeit der Preis für kleinen Gitterpunkt Abstand mit guter Genauigkeit der Ergebnisse. Neben impliziten Verfahren, auf die wir hier nicht näher eingehen wollen, wurde noch ein Weg gefunden, um die Rechenzeit für kleine Δx beziehungsweise für große η zu reduzieren:

Die numerischen Instabilitäten, die $\Delta t \propto \Delta x^2$ verlangen, werden hauptsächlich von unphysikalischen Störungen mit kurzer Wellenlänge, d.h. mit einer Ausdehnung von weniger als drei Gitterpunkten, hervorgerufen. Diese Instabilitäten wachsen zuerst, wenn Δt über die durch (A.26) gesetzte Grenze hinaus gewählt wird.

Andererseits verlangt der SHASTA-Algorithmus wegen der Flußkorrektur mindestens drei Punkte, um physikalisch sinnvolle Strukturen zu reproduzieren. Es ist deshalb möglich, die kurzwelligen Störungen in jedem Zeitschritt einfach wegzufiltern, ohne dabei physikalische Information zu verlieren. In unseren Tests hat sich herausgestellt, daß es am günstigsten ist, wenn die zweite Ableitung jeder Geschwindigkeitskomponente $\partial^2 v$ mit

$$(\partial^2 v)'_i = (1-2A) \cdot \partial^2 v_i + A [\partial^2 v_{im} + \partial^2 v_{ip}] \quad (A.27)$$

gefiltert wird [Cus 82], wobei i die Nummer der gerade betrachteten Zelle ist. im (ip) ist die linke (rechte) Nachbarzelle in Differentiationsrichtung. A reguliert die Filterstärke zwischen keiner ($A=0$) und bester ($A=0.25$) Wirkung.

Unsere Tests haben ergeben, daß mit voll wirksamem Filter ($A=0.25$) der Zeitschritt $\Delta t_{\max}$ rund das 1.7-fache der durch Gleichung (A.26) erlaubten Größe haben kann, ohne daß es zu numerischen Instabilitäten kommt. Die benötigte Rechenzeit konnte auf diese Weise mehr als halbiert werden.

Ein weiteres numerisches Problem ergibt sich an der Kontaktstelle von fließender Materie zum Vakuum. Wenn den leeren Gitterzellen eine Geschwindigkeit $v=0$ zugeordnet würde, gäbe es eine Reibung zwischen Vakuum und Material, die zu einer unphysikalischen Wärmeproduktion führte. Dies würde die Energieerhaltung in der Rechnung zerstören und zu einem falschen thermischen Druck am Rande des berechneten Objektes führen.

Reibungseffekte müssen also am Rande der berechneten Materieverteilung "abgeschaltet" werden. Dies geschieht durch Ersetzen der Geschwindigkeitsableitungen dieser Punkte durch die Ableitungen am letzten besetzten Nachbarpunkt [Abr 64]. Bei weniger als drei besetzten Punkten in Differentiationsrichtung wird die zweite Ableitung auf null gesetzt. Ist nur ein Punkt besetzt, so wird auch die erste Ableitung ignoriert.

Mit diesem Verfahren erhalten wir ein glattes Geschwindigkeitsprofil und eine vernünftige thermische Energie in den Randbezirken sowie eine Erhaltung der Gesamtenergie, die besser als 5% ist.

Alle diese für Viskosität gemachten Überlegungen gelten analog für eine explizite Berücksichtigung der Wärmeleitung.

REFERENZEN

- [Abr 64] Abramowitz, Stegun, 'Handbook of Mathematical Functions', NBS, Applied Mathematics, 1964
- [Arn 83] R.C.Arnold, 'Heavy Ion Driven Inertial Confinement Fusion', MPQ-Report 79/83, MPI-Quantenoptik, Garching/FRG
- [Bad 81] B.Badger et al., 'The HIBALL-Study', Kernforschungszentrum Karlsruhe Report KfK 3202 und University of Wisconsin, Madison, Report UWFD 450
- [Bor 73] J.P.Boris, D.L.Book, J. of Comp. Phys., 11 , 38 (1973)
- [Bor 75] J.P.Boris, D.L.Book, J. of Comp. Phys., 18 , 248 (1975)
- [Bor 76] J.P.Boris, D.L.Book, J. of Comp. Phys., 20 , 397 (1976)
- [Buc 80] G.Buchwald, Diplomarbeit, Universität Frankfurt, 1980
- [Buc 81] G.Buchwald, L.P.Csernai, J.A.Maruhn, W.Greiner, H.Stöcker, Phys. Rev. C24, 135 (1981)
- [Buc 82] G.Buchwald, G.Graebner, J.A.Maruhn, H.Stöcker, 'The Incorporation of Viscosity and Heat Conduction in 3-dimensional Nuclear Fluid Dynamics', Universität Frankfurt, preprint UFTP 104/1982

- [Buc 83] G.Buchwald, G.Graebner, J.Theis, J.A.Maruhn,
H.Stöcker, H.Kruse, Laser and Particle Beams 1, 335
(1983)
- [Buc 83a] G.Buchwald, G.Graebner, J.Theis, J.A.Maruhn,
W.Greiner, H.Stöcker, Phys. Rev. C28, 1119 (1983)
- [Cha 61] S.Chandrasekhar, 'Hydrodynamic and Hydromagnetic
Stability', Oxford University Press, Oxford, England,
1961
- [Cie 84] J.Cieza, G.Buchwald, wird veröffentlicht
- [Con 67] E.U.Condon, H.Odishaw, 'Handbook of Physics', Mc
Graw-Hill, 1967, p. 4-192
- [Cus 82] R.Y.Cusson, private Mitteilung
- [Dal 67] B.Daly, Phys. Fluids 10, 297 (1967)
- [Dal 69] B.Daly, Phys. Fluids 12, 1340 (1969)
- [Fra 74] G.Fraley, W.Gula, D.Henderson, R.McCrory, R.Malone,
R.Mason, R.Morse, Plasma Physics and Controlled Nuclear
Fusion Research, Tokyo, Japan, 1974 (IAEA, Vienna,
Austria), p. 543
- [Fre 77] J.R.Freeman, M.J.Clauser, S.L.Thompson, Nucl. Fusion
17, 223 (1977)

- [Gra 84] G.Graebner, Dissertation, Universität Frankfurt, im Druck

- [Hal 68] G.J.Haltiner, Naval Weather Research Facility Report NWRP 30-0768-142, 1968

- [Har 66] F.Harlow, J.E.Welch, Phys. Fluids 9, 842 (1966)

- [Har 71] F.H.Harlow, A.A.Amsden, Los Alamos Monograph 'Fluid Dynamics', LA-4700, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, USA

- [Kul 82] H.J.Kull, Inst. f. Angewandte Physik, Technische Hochschule Darmstadt, IAP-Report 102/82, 1982

- [Lan 61] Lanholt, Börnstein, 'Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaft und Technik', (Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1961)

- [Lan 66] L.D.Landau, E.M.Lifschitz, Lehrbuch der theoretischen Physik VI, Akademie-Verlag, Berlin (1966)

- [Lax 60] P.D.Lax, B.Wendroff, Comm. Pure Appl. Math. 13, 217 (1960)

- [Mar 82] J.A.Maruhn, G.Buchwald, H.Kruse, J.Theis, Dynamical Problems in Mathematical Physics 26, 31 (1982), (Ed. by B.Brosowski and E.Martensen), Peter Lang Verlag Frankfurt/Bern

- [Mar 82a] J.A.Maruhn, private Mitteilung

- [Mas 75] R.J.Mason, Nucl. Fusion 15, 1031 (1975)
- [McC 77] R.L.McCrory, R.L.Morse, K.A.Taggart, Nucl. Sci. Eng. 64, 163 (1977)
- [McC 81] R.L.McCrory, L.Montierth, R.L.Morse, C.P.Verdon, Laser Interaction and Related Plasma Phenomena, (Plenum, New York) 5, 713 (1981)
- [McC 81a] R.L.McCrory, L.Montierth, R.L.Morse, C.P.Verdon, Phys. Rev. Lett. 46, 336 (1981).
- [Mik 82] K.O.Mikaelian, Phys. Rev. A26, 2140 (1982)
- [Mik 82a] K.O.Mikaelian, Phys. Rev. Lett. 48, 1365 (1982)
- [Min 67] V.N.Mineev, E.V.Savinov, Sov. Phys. JETP 25, 44 (1967)
- [Mon 79] L.Montierth, F.L.Cochran, R.L.Morse, Bull. Am. Phys. Soc. 24, 945 (1979)
- [Mor 71] K.W.Morton Proc. Roy. Soc. A323, 237 (1971)
- [MtV 81] J.Meyer-ter-Vehn, N.Metzler, 'Target Design for Heavy Ion Fusion', Report MPQ 48, MPI-Quantenoptik, Garching/FRG
- [MtV 82] J.Meyer-ter-Vehn, private Mitteilung
- [Ray 94] Lord Rayleigh, Theory of Sound, 2nd Ed., (Dover, New York, 1894), Vol.2

- [Ric 67] R.D.Richtmeyer, K.W.Morton, 'Difference Methods for Initial Value Problems', Interscience Publishers, New York, 1967

- [Rob 66] K.V.Roberts, N.O.Weiss, Math. Comp. 20, 27 (1966)

- [Spi 61] L.Spitzer, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience, New York, 1961

- [Sto 82] H.Stöcker, G.Buchwald, L.P.Csernai, G.Graebner, J.A.Maruhn, W.Greiner, Nuclear Physics, A387, 205 (1982)

- [Suy 78] B.R.Suydam, 'Breakup of an Accelerated Shell Owing to Rayleigh Taylor-Instability', Los Alamos Report LA-7291-MS, 1978, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, New Mexico, USA

- [Tay 50] G.Taylor, Proc. Roy. Soc. A201, 192 (1950)

- [Ver 82] C.P.Verdon, R.L.McCrory, R.L.Morse, G.R.Baker, D.I.Meiron, S.A.Orzag, Phys. Fluids 25, 1653 (1982)

KURZBIOGRAPHIE

*Gerd Buchwald
Kopernikusstr. 15
6050 Offenbach am Main
Tel. (0611) 85 35 51*

Persönliche Daten:

*Geboren am 24. 8. 1956 in Offenbach als Sohn des Fernmelde-
technikers Werner Buchwald und dessen Ehefrau Gudrun, geb.
Reichert. Familienstand: verheiratet, ein Sohn*

Ausbildung:

Schule:

*1963-1966 Waldschule Tempelsee/Offenbach (Grundschule).
1966-1975 Albert Schweitzer-Schule, Offenbach (Gymnasium),
Abschluß: Abitur.*

Studium:

*1975 Beginn des Studiums der Physik an der Universität
Frankfurt am Main; ab 1977 unterstützt durch ein
Stipendium der Studienstiftung des deutschen Volkes.
1977 Diplom-Vorprüfung an der Universität Frankfurt.
1980 Diplom an der Universität Frankfurt, Note: sehr gut
Seit 1980 wissenschaftlicher Assistent am Institut für theore-
tische Physik in Frankfurt.*

Meine akademischen Lehrer waren:

*Prof. Dr. R. Bass,
Prof. Dr. K. Bethge,
Prof. Dr. F. Constantinescu,
Dr. Dörfel,
Prof. Dr. R. Dreizler,
Prof. Dr. T. Elze,
Dr. B. Fink,
Prof. Dr. W. Greiner,
Prof. Dr. R. Gümbel,
Prof. Dr. H. Hartmann,
Prof. Dr. D. Keim,
Prof. Dr. H. Kosta,
Prof. Dr. J. Martienssen,
Prof. Dr. J.A. Maruhn,
Prof. Dr. G. Mauck,
Prof. Dr. E. Mohler,
Prof. Dr. B. Müller,
Prof. Dr. H. Müser,
Prof. Dr. J. Rafelski,
Prof. Dr. H.J. Reinhardt,
Prof. Dr. H.W. Roesky,
Prof. Dr. A. Schaarschmidt,
Prof. Dr. H. Schmidt-Böcking,
Prof. Dr. E. Schopper,
Prof. Dr. W. Schwarz,
Priv. Doz. Dr. G. Soff,
Prof. Dr. K. Stelzer,
Prof. Dr. H. Stöcker,
Prof. Dr. F. Stummel,
Dr. U. Troltenier,
Prof. Dr. F. Wächter,
Prof. Dr. D. Wolf.*

Danksagung

Meinem Lehrer, Herrn Prof. Dr. W.Greiner, möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine Unterstützung danken.

Zu großem Dank bin ich Herrn Prof. Dr. J.A.Maruhn und Prof. Dr. H.Stöcker für die ausgezeichnete Zusammenarbeit verpflichtet.

Ferner gebührt mein Dank den Herren Prof. Dr. R.Y.Cusson, Prof. Dr. P.Mulser, Dr. J.Meyer-ter-Vehn und Dr. H.J.Kull für wertvolle Diskussionen und Anregungen.

Bedanken möchte ich mich auch für die freundschaftliche Zusammenarbeit mit meinen Freunden und Kollegen im Institut, insbesondere bei den Herren Dr. G.Graebner, Dr. H.Kruse, Dr. J.Theis, D.Barthel, T.Rentzsch, M.Seiwert, K.Depta und J.Cieza.

Schließlich schulde ich Frau B.Utschig großen Dank für das Anfertigen zahlreicher Zeichnungen. Herrn P.Holzmann sei für den Druck der Arbeit gedankt.

Die benötigte Rechenzeit stellte die Gesellschaft für Schwerionenforschung in Darmstadt zur Verfügung.

Diese Arbeit möchte ich meiner Familie widmen, die mich immer unterstützte und großes Verständnis zeigte.

